

Universität des Saarlandes  
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät I  
Fachrichtung Informatik  
Diplom-Studiengang Informatik

**Diplomarbeit**

**Bewegungsanalyse  
von  
Nanopartikeln im Trachealgewebe  
von  
Hühnerembryonen**

vorgelegt von

**Christian Kariger**

am 29.09.2008

angefertigt unter der Leitung von

Prof. Dr. Joachim Weickert

betreut von

Dr. Andrés Bruhn

begutachtet von

Prof. Dr. Joachim Weickert

Prof. Dr. Claus-Michael Lehr

## **Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und alle verwendeten Quellen angegeben habe.

Saarbrücken, den 29.09.2008

## **Kurzfassung**

Ziel dieser Arbeit soll die Geschwindigkeitsermittlung von Partikeln durch optische Fluss-Algorithmen sein. Die einzelnen optischen Fluss-Felder werden mit Hilfe der Variationsrechnung berechnet. Insgesamt werden zwölf Algorithmen für die Geschwindigkeitsberechnung untersucht und die Methode mit dem besten Ergebnis ausgewählt. Zur Bestimmung der Methode mit den genauesten Werten für die Bewegungsrate verwenden wir drei Testsequenzen die am Pharmazie-Lehrstuhl von Professor Lehr aufgenommen wurden. Bevor die Algorithmen auf die Testfälle angewendet werden, soll eine Übersicht über die mathematischen Grundlagen erfolgen und die optischen Fluss-Methoden definiert werden.

**Inhaltsverzeichnis**

<b>1. Einleitung</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>2. Grundlagen</b> . . . . .	<b>4</b>
a ) optischer Fluss . . . . .	4
b ) allgemeine Variationsrechnung und Euler-Lagrange-Gleichungen . . . . .	5
c ) Variationsrechnung des optischen Flusses . . . . .	7
d ) Datentermvarianten . . . . .	8
i. Helligkeitskonstanz . . . . .	8
ii. Gradientenkonstanz . . . . .	9
iii. Bewegungstensor . . . . .	10
iv. Bestrafungsfunktion . . . . .	12
e ) Glattheitstermvarianten . . . . .	12
i. räumliche Glattheit . . . . .	12
ii. räumlich-zeitliche Glattheit . . . . .	13
iii. Divergenz-Wirbel-Glattheit . . . . .	14
f ) Diskretisierung . . . . .	14
g ) numerisches Lösungsverfahren . . . . .	15
<b>3. Algorithmen zur Bewegungsberechnung</b> . . . . .	<b>16</b>
a ) „Horn-Schunck“ . . . . .	16
b ) „Horn-Schunck robust“ . . . . .	17
c ) „Horn-Schunck robust mit Warping“ . . . . .	18
i. Konstanzannahme ohne Linearisierung → Warping . . . . .	18
ii. Algorithmus „Horn-Schunck robust mit Warping“ . . . . .	20
d ) „Spatio-Temporal robust mit Warping“ . . . . .	22
e ) „Particle Image Velocimetry robust mit Warping“ . . . . .	23
f ) „Particle Image Velocimetry 2 robust mit Warping“ . . . . .	24
<b>4. Testfälle</b> . . . . .	<b>25</b>
a ) Kohlepartikel . . . . .	25
b ) Partikel der Größe 1 Mikrometer . . . . .	33
c ) Partikel der Größe 100 Nanometer . . . . .	42
d ) Ergebnisse . . . . .	50
<b>5. Zusammenfassung</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>6. Quellenverzeichnis</b> . . . . .	<b>53</b>

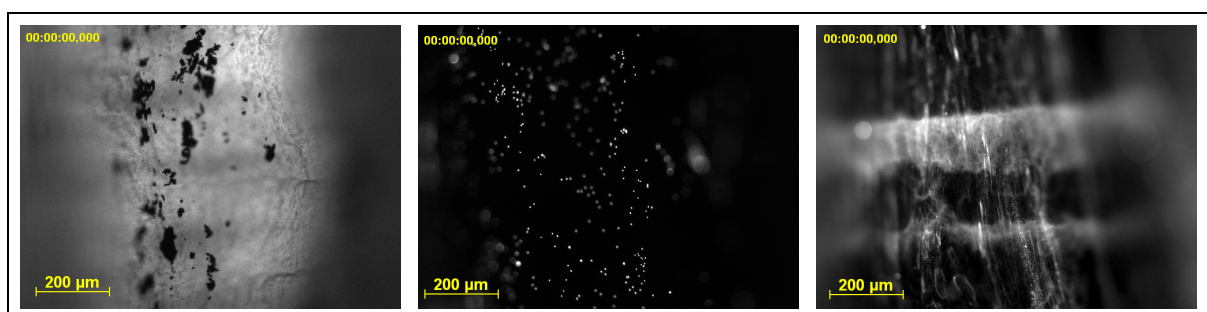


## 1. Einleitung

Die optische Fluss-Berechnung ist ein Forschungsgebiet der Bildverarbeitung und des Maschinensehens. Angefangen mit einfachen Modellen, haben sich, im Laufe der Zeit, Algorithmen entwickelt, die nicht nur in der Informatik Anwendung finden, sondern auch in Bereichen, die die Vorteile der Informationstechnologie nutzen wollen, wie zum Beispiel der Automobilbranche oder der Medizin. Der optische Fluss repräsentiert die zurückgelegte Distanz von Objekten in einer bestimmten Zeit und aus diesen Informationen lässt sich deren Geschwindigkeit berechnen. Es existieren eine Vielzahl von Ansätzen, den optischen Fluss aus Bilderfolgen zu erhalten. Die besten Ergebnisse werden durch die Variationsrechnung erzielt.

Ziel dieser Arbeit soll die Auswahl eines geeigneten optischen Fluss-Verfahren sein, das die Geschwindigkeit von Partikeln, die auf Lungengewebe von Hühnerembryonen aufgebracht wurden, am genauesten ermittelt. Zur Berechnung des optischen Flusses werden Mikroskopaufnahmen verwendet, die von Andreas Henning im Rahmen seiner Forschungsarbeit am Pharmazie-Lehrstuhl von Professor Lehr aufgenommen wurden. Forschungsgebiet ist die mukoziliare Reinigung im Bereich der Atemwege. Ein Aspekt ist die Geschwindigkeit mit der Fremdstoffe unter verschiedenen Bedingungen abtransportiert werden. Eine Messung der Geschwindigkeit wird zur Zeit noch von Hand durchgeführt, indem einige repräsentative Partikel aus den Aufnahmen ausgewählt und deren Positionen in den darauf folgenden Bildern beobachtet werden. Dadurch kann die durchschnittliche Geschwindigkeit ermittelt werden. Diese manuelle Auswertung ist sehr zeitaufwendig und soll mit Hilfe von geeigneten optischen Fluss-Algorithmen automatisiert werden.

Für die Bewertung der optischen Fluss-Algorithmen wollen wir drei Testsequenzen verwenden. In der ersten Sequenz sind Kohlepartikel in Größen von 1 bis 100 Mikrometern aufgebracht worden. Bei den anderen Testfällen handelt es sich um fluoreszierende Polystyren-Partikel mit Größen von einem Mikrometer bzw. 100 Nanometern.

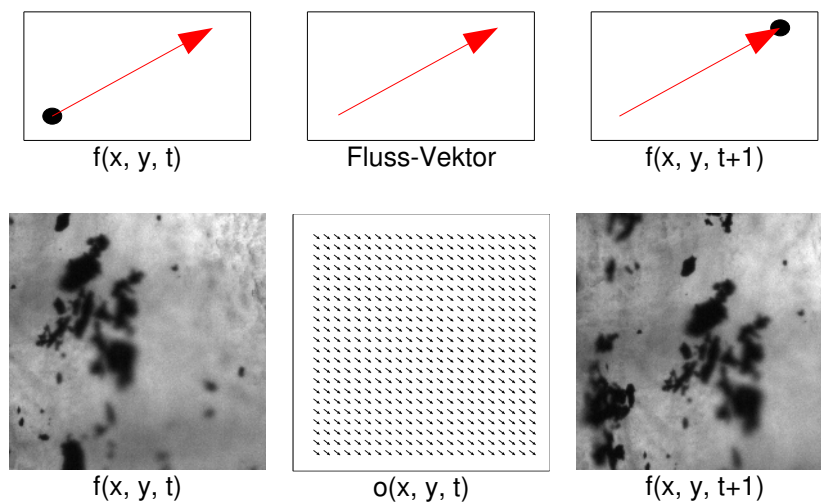


v.l.n.r: Kohle-, 1- $\mu$ m- und 100-nm-Partikel

## 2. Grundlagen

### a) optischer Fluss

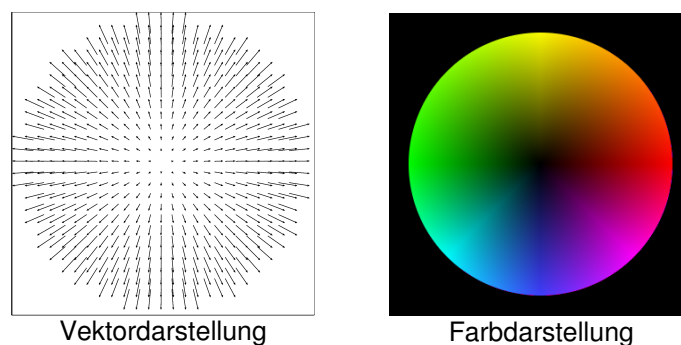
Der optische Fluss stellt die Bewegung von Objekten in der Bildebene dar. Zu jedem Pixel  $(x, y)$  eines Bildes zu einem Zeitpunkt  $t$ , repräsentiert durch die Funktion  $f(x, y, t)$ , kann durch die optischen Fluss-Algorithmen ein einzelner optischer Fluss-Vektor berechnet werden. Alle Vektoren bilden zusammen das optische Fluss-Feld. Notwendig zur Berechnung sind zwei Bilder, das erste vor der Objektverschiebung und das zweite danach. Wir bezeichnen die Bilder mit  $f(x, y, t)$  bzw.  $f(x, y, t+1)$ .



Der optische Fluss-Vektor eines Pixels wird durch einen zweidimensionalen Vektor  $\mathbf{o} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})^T$  repräsentiert. Die genaue Notation des Fluss-Feldes sieht dann wie folgt aus:

$$\mathbf{o}(x, y, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(x, y, t) \\ \mathbf{v}(x, y, t) \end{pmatrix}$$

Für die visuelle Abbildung existieren zwei Möglichkeiten, die Vektor- und die Farbdarstellung. Bei der Vektordarstellung werden die einzelnen optischen Flüsse des Fluss-Feldes in ihrer Richtung und Länge abgebildet, bei der Farbdarstellung wird je nach Richtung und Länge jedem Vektor eine Farbe zugeordnet.



## b) allgemeine Variationsrechnung und Euler-Lagrange-Gleichungen

Das optische Fluss-Feld wird mit Hilfe der Variationsrechnung berechnet. Aus diesem Grund soll in diesem Abschnitt das allgemeine Variationsproblem und dessen Lösung durch Euler-Lagrange-Gleichungen vorgestellt werden [Els, Deipcv 10.4]. Im nächsten Abschnitt wird dann die Variationsrechnung für den optischen Fluss gezeigt.

$$E(u) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u_x) dx$$

Das Energiefunktional  $\mathbf{E}(u)$  soll durch eine stetig differenzierbare Funktion  $u(x)$ ,  $x \in [x_0, x_1]$  minimiert werden. Eine optimale Lösung  $u^*(x)$  muss notwendiger Weise die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen. Bei einem konvexen Funktional, existiert nur eine einzige minimierende Funktion  $u^*(x)$ . Die Euler-Lagrange-Gleichung für das Energiefunktional  $\mathbf{E}(u)$  lautet:

$$F_u - \frac{d}{dx} F_{u_x} = 0$$

Zusätzlich existieren die natürlichen Randbedingungen, für  $x = x_0$  und  $x = x_1$  gilt:

$$F_{u_x}(x, u, u_x) = 0$$

Dies ist durch einen einfachen Beweis zu zeigen [Mathe C]. Sei zunächst  $h(x)$ ,  $x \in [x_0, x_1]$ , eine differenzierbare Funktion mit  $h(x_0) = 0$  und  $h(x_1) = 0$ . Weiter sei  $u^*$  das Minimum von  $\mathbf{E}(u)$ . Nun besitzt das Energiefunktional  $\hat{\mathbf{E}}(\varepsilon) = \mathbf{E}(u^* + \varepsilon h)$  bei  $\varepsilon = 0$  ein Extremum und die Ableitung des Funktional ist an dieser Stelle gleich null.

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{\mathbf{E}}'(0) \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} V(u^* + \varepsilon h) \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} F(x, u^* + \varepsilon h, u^*_x + \varepsilon h_x) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\varepsilon} F(x, u^* + \varepsilon h, u^*_x + \varepsilon h_x) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial F(x, u^* + \varepsilon h, u^*_x + \varepsilon h_x)}{\partial u} \cdot h(x) + \frac{\partial F(x, u^* + \varepsilon h, u^*_x + \varepsilon h_x)}{\partial u_x} \cdot h_x(x) \right] dx \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon = 0$  können wir den Term vereinfacht schreiben als:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left[ F_u(x, u^*, u_x^*) \cdot h(x) + F_{u_x}(x, u^*, u_x^*) \cdot h_x(x) \right] dx$$

Durch die partielle Integration des zweiten Term erhalten wir die folgende Schreibweise:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \left( F_u(x, u^*, u_x^*) - \frac{d}{dx} F_{u_x}(x, u^*, u_x^*) \right) \cdot h(x) \right] dx + \left[ F_{u_x}(x, u^*, u_x^*) \cdot h(x) \right]_{x_0}^{x_1}$$

Da  $h(x) = 0$  für  $x = x_0$  und  $x = x_1$  ist der zweite Term gleich null.

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \left( F_u(x, u^*, u_x^*) - \frac{d}{dx} F_{u_x}(x, u^*, u_x^*) \right) \cdot h(x) \right] dx$$

Zudem war  $h(x)$  als eine beliebige differenzierbare Funktion gewählt, der obige Term kann dann nur null werden, wenn folgendes gilt:

$$0 = F_u(x, u^*, u_x^*) - \frac{d}{dx} F_{u_x}(x, u^*, u_x^*)$$

Dies ist nicht anderes als die Euler-Lagrange-Gleichung und zeigt, dass diese, für die minimierende Funktion  $u^*(x)$  des Energiefunktional  $E(u)$ , gleich null ist. Für die Randbedingungen gilt folgendes:

$$0 = \left[ F_{u_x}(x, u^*, u_x^*) \cdot h(x) \right]_{x_0}^{x_1}$$

Für die Funktion  $h(x)$ , mit  $h(x_0) = 0$  und  $h(x_1) = 0$ , gilt dieses ohne Einschränkung. Da aber  $h(x)$  beliebig ist und nicht in jedem Fall  $h(x_0) = 0$  sowie  $h(x_1) = 0$  ist, muss die natürliche Randbedingung

$$F_{u_x}(x, u^*, u_x^*) = 0$$

für  $x = x_0$  und  $x = x_1$  gelten.

Nachdem in diesem Abschnitt die allgemeine Variationsrechnung vorgestellt wurde, kommen wir im Folgenden zur Variationsrechnung des optischen Flusses.

### c) Variationsrechnung optischer Fluss

Für die Berechnung des optischen Flusses muss das Energiefunktional  $\mathbf{E}(\mathbf{u})$  der allgemeinen Variationsrechnung erweitert werden [Ipcv 14.2]. Bisher wurde über eine Variable  $x$  integriert, für zweidimensionale Bilder muss eine weitere Variable  $y$  eingeführt werden und für die zeitliche Abfolge eine Variable  $t$ . Zudem wird jetzt nach zwei zu minimierenden Funktionen,  $\mathbf{u}(x, y, t)$  und  $\mathbf{v}(x, y, t)$ , gesucht, die Bestandteile des optischen Fluss-Feldes  $\mathbf{o}(x, y, t) = (\mathbf{u}(x, y, t), \mathbf{v}(x, y, t))^T$  sind.

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, t, u, u_x, u_y, u_t, v, v_x, v_y, v_t) dx dy dt$$

Da die Minimierung des Energiefunktionals nun durch zwei Funktionen geschehen soll, erhalten wir zwei Euler-Lagrange Gleichungen.

$$F_u - \frac{d}{dx} F_{u_x} - \frac{d}{dy} F_{u_y} - \frac{d}{dt} F_{u_t} = 0$$

$$F_v - \frac{d}{dx} F_{v_x} - \frac{d}{dy} F_{v_y} - \frac{d}{dt} F_{v_t} = 0$$

Für die weitere Arbeit wird die Funktion  $F(\cdot)$  in zwei Terme aufgespalten, in einen Datenterm  $\mathbf{D}$  und einen Glattheitsterm  $\mathbf{G}$ . Der Datenterm soll die Relation zu den Bilddaten  $\mathbf{f}(x, y, t)$  herstellen und der Glattheitsterm reguliert die Abweichung eines optischen Fluss-Vektors zu seinen Nachbarn [Deipcv 16.2].  $\partial^n f$  repräsentiert hierbei die partiellen Ableitungen  $n$ -ter Ordnung der Funktion  $\mathbf{f}(x, y, t)$ .  $\alpha$  dient als Regulierungsparameter, das Verhältnis zwischen Datenterm und Glattheitsterm kann dadurch verändert werden.

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} D(\partial^n \mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \alpha \cdot G(u_x, u_y, u_t, v_x, v_y, v_t) dx dy dt$$

$$D_u - \alpha \cdot \left( \frac{d}{dx} G_{u_x} + \frac{d}{dy} G_{u_y} + \frac{d}{dt} G_{u_t} \right) = 0$$

$$D_v - \alpha \cdot \left( \frac{d}{dx} G_{v_x} + \frac{d}{dy} G_{v_y} + \frac{d}{dt} G_{v_t} \right) = 0$$

In den nächsten Abschnitten werden mögliche Varianten des Datenterms sowie des Glattheitsterm besprochen.

### d) Datentermvarianten

Für die Berechnung des optischen Flusses existieren eine Vielzahl verschiedenster Varianten des Datenterms [Bruhn 2.2.1.1]. Grundlage der Datenterme ist die Annahme, dass Eigenschaften eines Bildes zum Zeitpunkt  $t$  im darauf folgendem Bild  $t+1$  erhalten bleiben. Wir wollen hier nur zwei Arten verwenden, die Helligkeits- und die Gradientenkonstanz.

#### i. Helligkeitskonstanz

Bei der Helligkeitskonstanz wird davon ausgegangen, dass sich die Helligkeit eines Objektes, während der Bewegung, nicht ändert. Der Grauwert eines Pixels zum Zeitpunkt  $t$  ist dann gleich dem Grauwert des, um den optischen Fluss  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})^T$ , verschobenen Pixels zum Zeitpunkt  $t+1$  [Hsof].

$$f(x, y, t) = f(x+u, y+v, t+1)$$

Die oben verwendete Formel hat zwei Nachteile, zum einen ist sie implizit, zum anderen ist sie nicht konvex [Bruhn 2.2.1.1]. Konvexität wird aber für die Variationsrechnung verlangt, damit eine einzige optimale Lösung existiert. Nach Taylor-Linearisierung und Quadrierung erhalten wir als Datenterm:

$$D_H(\partial^1 f, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (f_x \cdot \mathbf{u} + f_y \cdot \mathbf{v} + f_t)^2$$

Das Energiefunktional für die Helligkeitskonstanz  $D_H$  und Glattheitsterm  $G$  sieht dann folgendermaßen aus:

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} (f_x \cdot \mathbf{u} + f_y \cdot \mathbf{v} + f_t)^2 + \alpha \cdot G \, dx \, dy \, dt$$

Die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen können nun ermittelt werden und lauten:

$$2 \cdot (f_x \cdot \mathbf{u} + f_y \cdot \mathbf{v} + f_t) \cdot f_x - \alpha \cdot \left( \frac{d}{dx} G_{u_x} + \frac{d}{dy} G_{u_y} + \frac{d}{dt} G_{u_t} \right) = 0$$

$$2 \cdot (f_x \cdot \mathbf{u} + f_y \cdot \mathbf{v} + f_t) \cdot f_y - \alpha \cdot \left( \frac{d}{dx} G_{v_x} + \frac{d}{dy} G_{v_y} + \frac{d}{dt} G_{v_t} \right) = 0$$

Hierbei sei zu beachten, dass der Glattheitsterm  $G$ , weder  $\mathbf{u}$  noch  $\mathbf{v}$  enthält, sondern nur deren Ableitungen.

## ii. Gradientenkonstanz

Als zweite Datentermvariante betrachten wir die Konstanz der beiden partiellen Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$  des Bildes in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Es soll also ein optischer Flussvektor  $\mathbf{o} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, 1)^T$  existieren, sodass folgende zwei Gleichungen gelten:

$$f_x(x, y, t) = f_x(x+u, y+v, t+1)$$

$$f_y(x, y, t) = f_y(x+u, y+v, t+1)$$

Wie bei der Helligkeitskonstanz, haben wir auch hier das Problem der Nichtkonvexität. Nach Taylor-Linearisierung erhält man:

$$f_{xx} \cdot \mathbf{u} + f_{xy} \cdot \mathbf{v} + f_{xt} = 0$$

$$f_{xy} \cdot \mathbf{u} + f_{yy} \cdot \mathbf{v} + f_{yt} = 0$$

Werden beide Gleichungen quadriert und zusammengefasst, entsteht der Datenterm  $\mathbf{D}_G$ .

$$\mathbf{D}_G(\partial^2 f, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (f_{xx} \cdot \mathbf{u} + f_{xy} \cdot \mathbf{v} + f_{xt})^2 + (f_{xy} \cdot \mathbf{u} + f_{yy} \cdot \mathbf{v} + f_{yt})^2$$

Das daraus resultierende Energiefunktional, mit einem Glattheitsterm  $\mathbf{G}$ , berücksichtigt nun die Konstanz des Gradienten  $(f_x, f_y)^T$ .

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} (f_{xx} \cdot \mathbf{u} + f_{xy} \cdot \mathbf{v} + f_{xt})^2 + (f_{xy} \cdot \mathbf{u} + f_{yy} \cdot \mathbf{v} + f_{yt})^2 + \alpha \cdot \mathbf{G} \, dx dy dt$$

Die dazugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen können hergeleitet werden und lauten, unter der Annahme, dass  $\mathbf{G}$  wieder nur die Ableitungen von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  beinhaltet.

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (f_{xx} \cdot \mathbf{u} + f_{xy} \cdot \mathbf{v} + f_{xt}) \cdot f_{xx} \\ & + 2 \cdot (f_{xy} \cdot \mathbf{u} + f_{yy} \cdot \mathbf{v} + f_{yt}) \cdot f_{xy} \\ & - \alpha \cdot \left( \frac{d}{dx} G_{u_x} + \frac{d}{dy} G_{u_y} + \frac{d}{dt} G_{u_t} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (f_{xx} \cdot \mathbf{u} + f_{xy} \cdot \mathbf{v} + f_{xt}) \cdot f_{xx} \\ & + 2 \cdot (f_{xy} \cdot \mathbf{u} + f_{yy} \cdot \mathbf{v} + f_{yt}) \cdot f_{xy} \\ & - \alpha \cdot \left( \frac{d}{dx} G_{v_x} + \frac{d}{dy} G_{v_y} + \frac{d}{dt} G_{v_t} \right) = 0 \end{aligned}$$

### iii. Bewegungstensor

Beide vorgestellten Datenterme  $\mathbf{D}_H$  und  $\mathbf{D}_G$  lassen sich mit Hilfe des optischen Fluss-Vektors  $\mathbf{o} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, 1)^T$  und dem entsprechenden Bewegungstensor  $\mathbf{T}_H$  und  $\mathbf{T}_G$  in kompakter und vereinfachter Weise darstellen [Bruhn 2.2.3]. Als erstes soll dies für den Helligkeits- und danach für den Gradientendatenterm gezeigt werden.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_H(\partial^1 \mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}_x \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f}_y \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_t)^2 \\
 &= ((\mathbf{u}, \mathbf{v}, 1) \cdot \nabla_3 \mathbf{f})^2 \\
 &= (\mathbf{o}^T \cdot \nabla_3 \mathbf{f})^2 \\
 &= (\mathbf{o}^T \cdot \nabla_3 \mathbf{f}) \cdot (\nabla_3 \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{o}) \\
 &= \mathbf{o}^T \cdot (\nabla_3 \mathbf{f} \cdot \nabla_3 \mathbf{f}^T) \cdot \mathbf{o} \\
 &= \mathbf{o}^T \cdot \mathbf{T}_H \cdot \mathbf{o}
 \end{aligned}$$

Im Folgendem soll noch der Aufbau des Tensors  $\mathbf{T}_H$ , mit  $\nabla_3 = (\partial_x, \partial_y, \partial_t)^T$  erklärt werden:

$$\mathbf{T}_H = (\nabla_3 \mathbf{f} \cdot \nabla_3 \mathbf{f}^T) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \\ \mathbf{f}_t \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y, \mathbf{f}_t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x^2 & \mathbf{f}_x \mathbf{f}_y & \mathbf{f}_x \mathbf{f}_t \\ \mathbf{f}_x \mathbf{f}_y & \mathbf{f}_y^2 & \mathbf{f}_y \mathbf{f}_t \\ \mathbf{f}_x \mathbf{f}_t & \mathbf{f}_y \mathbf{f}_t & \mathbf{f}_t^2 \end{pmatrix}$$

Da wir nun eine weitere Notation für den Datenterm haben, schreiben wir die Formel für das Energiefunktional um.

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} (\mathbf{o}^T \cdot \mathbf{T}_H \cdot \mathbf{o}) + \alpha \cdot \mathbf{G} \, dx \, dy \, dt$$

Nun fehlt noch der Bewegungstensor für die Gradientenkonstanz. Wir gehen von der hergeleiteten Formel für den Datenterm  $\mathbf{D}_G$  aus.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_G(\partial^2 \mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}_{xx} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f}_{xy} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_{xt})^2 + (\mathbf{f}_{xy} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f}_{yy} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_{yt})^2 \\
 &= (\mathbf{o}^T \cdot \nabla_3 \mathbf{f}_x)^2 + (\mathbf{o}^T \cdot \nabla_3 \mathbf{f}_y)^2 \\
 &= (\mathbf{o}^T \cdot \nabla_3 \mathbf{f}_x) \cdot (\nabla_3 \mathbf{f}_x^T \cdot \mathbf{o}) + (\mathbf{o}^T \cdot \nabla_3 \mathbf{f}_y) \cdot (\nabla_3 \mathbf{f}_y^T \cdot \mathbf{o}) \\
 &= \mathbf{o}^T \cdot (\nabla_3 \mathbf{f}_x \cdot \nabla_3 \mathbf{f}_x^T) \cdot \mathbf{o} + \mathbf{o}^T \cdot (\nabla_3 \mathbf{f}_y \cdot \nabla_3 \mathbf{f}_y^T) \cdot \mathbf{o} \\
 &= \mathbf{o}^T \cdot ((\nabla_3 \mathbf{f}_x \cdot \nabla_3 \mathbf{f}_x^T) + (\nabla_3 \mathbf{f}_y \cdot \nabla_3 \mathbf{f}_y^T)) \cdot \mathbf{o} \\
 &= \mathbf{o}^T \cdot \mathbf{T}_G \cdot \mathbf{o}
 \end{aligned}$$



Die Matrix des Bewegungstensor  $\mathbf{T}_G$  sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_G &= (\nabla_3 \mathbf{f}_x \cdot \nabla_3 \mathbf{f}_x^T) + (\nabla_3 \mathbf{f}_y \cdot \nabla_3 \mathbf{f}_y^T) \\
 &= \begin{pmatrix} f_{xx} \\ f_{xy} \\ f_{xt} \end{pmatrix} \cdot (f_{xx}, f_{xy}, f_{xt}) + \begin{pmatrix} f_{xy} \\ f_{yy} \\ f_{yt} \end{pmatrix} \cdot (f_{xy}, f_{yy}, f_{yt}) \\
 &= \begin{pmatrix} f_{xx}^2 & f_{xx} f_{xy} & f_{xx} f_{xt} \\ f_{xx} f_{xy} & f_{xy}^2 & f_{xy} f_{xt} \\ f_{xx} f_{xt} & f_{xy} f_{xt} & f_{xt}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{xy}^2 & f_{xy} f_{yy} & f_{xy} f_{yt} \\ f_{xy} f_{yy} & f_{yy}^2 & f_{yy} f_{yt} \\ f_{xy} f_{yt} & f_{yy} f_{yt} & f_{yt}^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} f_{xx}^2 + f_{xy}^2 & f_{xx} f_{xy} + f_{xy} f_{yy} & f_{xx} f_{xt} + f_{xy} f_{yt} \\ f_{xx} f_{xy} + f_{xy} f_{yy} & f_{xy}^2 + f_{yy}^2 & f_{xy} f_{xt} + f_{yy} f_{yt} \\ f_{xx} f_{xt} + f_{xy} f_{yt} & f_{xy} f_{xt} + f_{yy} f_{yt} & f_{xt}^2 + f_{yt}^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Das umgeschriebene Energiefunktional mit Gradientenkonstanz sieht wie folgt aus und es unterscheidet sich nur im Bewegungstensor  $\mathbf{T}_G$  von dem Energiefunktional mit Helligkeitskonstanz.

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} (\mathbf{o}^T \cdot \mathbf{T}_G \cdot \mathbf{o}) + \alpha \cdot G \, dx dy dt$$

Auch die, für die Euler-Lagrange-Gleichungen, notwendigen Ableitungen  $\mathbf{D}_u$  und  $\mathbf{D}_v$  der Datenterme können mit Hilfe des Bewegungstensors formuliert werden. Sei  $\mathbf{T}$  ein beliebiger Bewegungstensor und  $\mathbf{o} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, 1)^T$ .

$$\mathbf{D}_u = 2 \cdot (1, 0, 0) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o}$$

$$\mathbf{D}_v = 2 \cdot (0, 1, 0) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o}$$

Die Ableitungen eingesetzt, erhalten wir folgende Notation für die Euler-Lagrange-Gleichungen.

$$2 \cdot (1, 0, 0) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o} - \alpha \cdot \left( \frac{d}{dx} G_{u_x} + \frac{d}{dy} G_{u_y} + \frac{d}{dt} G_{u_t} \right) = 0$$

$$2 \cdot (0, 1, 0) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o} - \alpha \cdot \left( \frac{d}{dx} G_{v_x} + \frac{d}{dy} G_{v_y} + \frac{d}{dt} G_{v_t} \right) = 0$$

iv. Bestrafungsfunktion

Das Konzept der Bestrafungsfunktion liegt darin, die Auswirkungen von Abweichungen in der Konstanzannahme zu reduzieren [BA]. Hierbei wollen wir den quadratischen Datenterm  $\mathbf{D} = (\mathbf{o}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o})$  durch einen linearen Datenterm ersetzen. Dafür verwenden wir die Bestrafungsfunktion  $\Psi$  als äußere Funktion.

$$\Psi(\mathbf{o}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o}) = \sqrt{(\mathbf{o}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o}) + \varepsilon^2}$$

Hierbei sei  $\varepsilon^2 > 0$  ein kleiner additiver Zusatz, der für die Ableitung des robusten Datenterms  $\Psi(\mathbf{o}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o})$  wichtig ist.

$$\Psi'(\mathbf{o}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o}) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(\mathbf{o}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o}) + \varepsilon^2}}$$

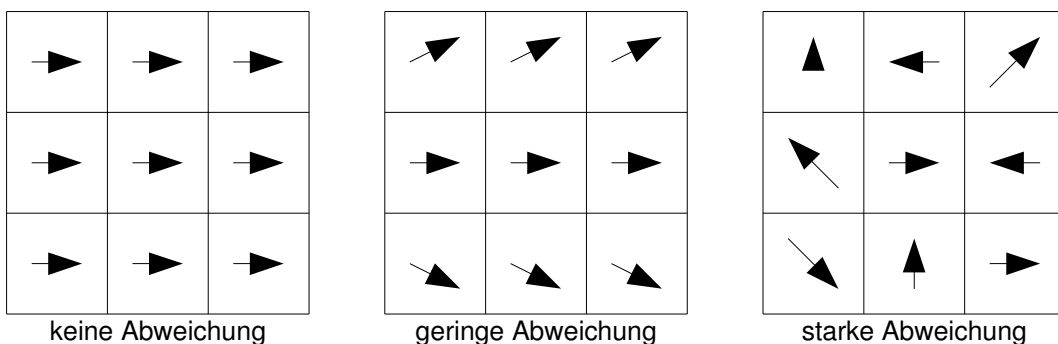
In obiger Formel sehen wir die Ableitung der Bestrafungsfunktion. Für den Fall  $(\mathbf{o}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o}) = 0$  würde ohne die Hinzunahme von  $\varepsilon^2$  eine Division durch Null stattfinden, die nicht definiert ist. Hierbei sollte der Zusatz nur gering von Null abweichen, z.B. 0.000001, um das Ergebnis wenig zu verfälschen.

**e) Glattheitstermvarianten**

Nach den Datentermvarianten betrachten wir uns die verschiedenen Glattheitsterme zur optischen Fluss-Berechnung. Wie bei den Datentermen, existiert eine Vielzahl von Varianten. Wir wollen in dieser Arbeit nur drei Terme verwenden und zwar die räumliche, die räumlich-zeitliche und die Divergenz-Wirbel-Glattheit.

i. räumliche Glattheit

Bei der räumlichen Glattheit wird davon ausgegangen, dass benachbarte Fluss-Vektoren sich nur gering in Richtung und Länge unterscheiden [Hsof].



Zur Bestimmung der Abweichung verwenden wir die partiellen Ableitungen  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $v_x$  und  $v_y$  des optischen Fluss-Vektors  $\mathbf{o} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{1})^T$ . Der Glattheitsterm sieht dann wie folgt aus [Deipcv 16.4]:

$$\alpha \cdot \mathbf{G}_R = \alpha \cdot (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2)$$

Das Energiefunktional mit allgemeinem Bewegungstensor  $\mathbf{T}$  und Term  $\mathbf{G}_R$  zur räumlichen Glattheit des optischen Fluss-Feldes hat folgende Notation.

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} (\mathbf{o}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o}) + \alpha \cdot (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) \, dx \, dy \, dt$$

Die optimale Lösung des Funktionals muss die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllen.

$$2 \cdot (1,0,0) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o} - \alpha \cdot (2 \cdot u_{xx} + 2 \cdot u_{yy}) = 0$$

$$2 \cdot (0,1,0) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o} - \alpha \cdot (2 \cdot v_{xx} + 2 \cdot v_{yy}) = 0$$

## ii. räumlich-zeitliche Glattheit

Hierbei wird, zusätzlich zur räumlichen Glattheit des optischen Flusses, eine zeitliche Konstanz angenommen [WS]. Ein möglicher Term könnte wie folgt aussehen.

$$\alpha \cdot \mathbf{G}_{RZ} = \alpha \cdot (u_x^2 + u_y^2 + u_t^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_t^2)$$

Hierbei haben die räumliche und die zeitliche Glattheit dieselbe Gewichtung, da man aber nicht uneingeschränkt davon ausgehen kann, dass das Konstanzverhalten in beiden Fällen gleich ist, wollen wir beide Annahmen trennen. Dazu führen wir einen weiteren Regulierungsparameter  $\beta$  ein, der das Verhältnis der zeitlichen Glattheit regelt.

$$\alpha \cdot \mathbf{G}_{RZ} = \alpha \cdot (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + \beta \cdot (u_t^2 + v_t^2)$$

Damit erhalten wir folgendes Funktional und die beiden Euler-Lagrange-Gleichungen.

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} (\mathbf{o}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o}) + \alpha \cdot (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + \beta \cdot (u_t^2 + v_t^2) \, dx \, dy \, dt$$

$$2 \cdot (1,0,0) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o} - \alpha \cdot (2 \cdot u_{xx} + 2 \cdot u_{yy}) - \beta \cdot (2 \cdot u_{tt}) = 0$$

$$2 \cdot (0,1,0) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o} - \alpha \cdot (2 \cdot v_{xx} + 2 \cdot v_{yy}) - \beta \cdot (2 \cdot v_{tt}) = 0$$

### iii. Divergenz-Wirbel-Glattheit

Diese Glattheit teilt sich in zwei Annahmen auf: die Divergenz- und in die sogenannte Wirbel-Glattheit [GP]. Bei der Divergenzannahme soll die Summe aus partieller Ableitung der u-Komponente in x-Richtung und partieller Ableitung der v-Komponente in y-Richtung minimal sein. Die Wirbel-Glattheit soll Richtungsänderungen der optischen Fluss-Vektoren innerhalb des Feldes verringern. Für den Term werden wieder zwei Regulierungsparameter,  $\alpha$  und  $\beta$ , verwendet.

$$\alpha \cdot G_{DW} = \alpha \cdot (u_x + v_y)^2 + \beta \cdot (u_y - v_x)^2$$

Durch Einsetzen in das Energiefunktional, zur Berechnung des optischen Flusses, erhält man folgende Notation.

$$E(u, v) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} (\mathbf{o}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o}) + \alpha \cdot (u_x + v_y)^2 + \beta \cdot (u_y - v_x)^2 \, dx dy dt$$

Durch Lösen der Euler-Lagrange-Gleichungen entsteht ein optisches Fluss-Feld, das nur eine geringe Anzahl von Wirbel aufweist.

$$2 \cdot (1, 0, 0) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o} - \alpha \cdot 2 \cdot (u_{xx} + v_{xy}) - \beta \cdot 2 \cdot (u_{yy} - v_{xy}) = 0$$

$$2 \cdot (0, 1, 0) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{o} - \alpha \cdot 2 \cdot (u_{xy} + v_{yy}) - \beta \cdot 2 \cdot (v_{xx} - u_{xy}) = 0$$

### f) Diskretisierung

Zum numerischen Lösen der Euler-Lagrange-Gleichungen benötigen wir eine Diskretisierung der Ableitungen. Für die Funktion  $f(x, y, t)$  ist dies kein Problem, da die Grauwerte eines Bildes schon in diskreter Form, als Pixel, vorliegen. Um ein Pixel  $(i, j)$  eines Bildes zum Zeitpunkt  $t$  anzusprechen, verwenden wir als Notation tiefgestellte eckige Klammern. Die gleiche Notation gebrauchen wir auch für die optischen Fluss-Vektoren  $\mathbf{o} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})^T$ .

$$f(i, j, t) \rightarrow f_{[i,j,t]}$$

$$\mathbf{o}_{[i,j,t]} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{[i,j,t]} \\ \mathbf{v}_{[i,j,t]} \end{pmatrix}$$

Wir unterscheiden zwischen folgenden Approximationen [lpcv 16.2] für die Ableitungen erster und zweiter Ordnung einer Funktion  $g(x, y, t)$ . Hierbei sei  $h_x$ ,  $h_y$  und  $h_t$  der Abstand zweier Pixel in jeweiliger Richtung.

Ableitungen 1. Ordnung		
Vorwärtsableitung	Rückwärtsableitung	Zentralableitung
$g_{x[i,j,t]} = \frac{g_{[i+1,j,t]} - g_{[i,j,t]}}{hx}$	$g_{x[i,j,t]} = \frac{g_{[i,j,t]} - g_{[i-1,j,t]}}{hx}$	$g_{x[i,j,t]} = \frac{g_{[i+1,j,t]} - g_{[i-1,j,t]}}{2 \cdot hx}$

Ableitungen 2. Ordnung
$g_{xx[i,j,t]} = \frac{g_{[i+1,j,t]} - 2 \cdot g_{[i,j,t]} + g_{[i-1,j,t]}}{hx^2}$
$g_{xy[i,j,t]} = \frac{g_{[i+1,j+1,t]} - g_{[i+1,j-1,t]} - g_{[i-1,j+1,t]} + g_{[i-1,j-1,t]}}{4 \cdot hx \cdot hy}$

Nach den diskreten Versionen der Bildfunktion  $\mathbf{f}$  und dem optischen Fluss-Feld  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})^T$ , fehlt noch die Diskretisierung des Bewegungstensors  $\mathbf{T}$ . Ein Zugriff auf einzelne Elemente erfolgt durch folgende Notation:

$$\mathbf{T}_{[i,j,t]} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{[i,j,t]}^{11} & \mathbf{T}_{[i,j,t]}^{12} & \mathbf{T}_{[i,j,t]}^{13} \\ \mathbf{T}_{[i,j,t]}^{21} & \mathbf{T}_{[i,j,t]}^{22} & \mathbf{T}_{[i,j,t]}^{23} \\ \mathbf{T}_{[i,j,t]}^{31} & \mathbf{T}_{[i,j,t]}^{32} & \mathbf{T}_{[i,j,t]}^{33} \end{pmatrix}$$

### g) numerisches Lösungsverfahren

Zum Lösen von Gleichungen existieren eine Vielzahl iterativer Verfahren [Hub, Sch], wie zum Beispiel das Relaxationsverfahren (SOR). Diese Methode ist eine Erweiterung eines anderen iterativen Lösungsschemas, dem Einzelschrittverfahren. Prinzip iterativer Verfahren ist, durch wiederholtes Berechnen einer Gleichung nach dem Muster  $x^{k+1} = \tau(x^k)$ , dass  $x^{k+1}$  gegen das gesuchte Ergebnis konvergiert. Folgende Gleichung wird für das Relaxationsverfahren angewendet, wobei  $\omega \in ]1; 2[$  und  $\check{x}^{k+1}$  das Ergebnis von  $x^k$  ist, berechnet durch das Einzelschrittverfahren.

$$x^{k+1} = (1 - \omega) \cdot x^k + \omega \cdot \check{x}^{k+1}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen der optischen Fluss-Algorithmen sollen durch das SOR-Verfahren gelöst werden. Die verschiedenen Algorithmen und die Lösungsgleichungen werden im nächsten Kapitel gezeigt.

### 3. Algorithmen zur Bewegungsberechnung

Nachdem wir die Grundlagen zur optischen Fluss-Berechnung besprochen haben, wollen wir, in diesem Kapitel, die einzelnen Daten- und Glattheitstermvarianten zu optischen Fluss-Algorithmen kombinieren.

#### a) „Horn-Schunck“ (HS)

Als Datenterm wird die Helligkeitskonstanz verwendet und man geht für das optische Fluss-Feld von der räumlichen Glattheit aus [HSof].

$$E(u, v) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} (f_x \cdot u + f_y \cdot v + f_t)^2 + \alpha \cdot (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) \, dx \, dy \, dt$$

Dank dem Bewegungstensor können wir aber auch die Gradientenkonstanz annehmen und das Energiefunktional mit allgemeinem Tensor  $\mathbf{T}$  kann wie folgt geschrieben werden.

$$E(u, v) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} ((u, v, 1) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}) + \alpha \cdot (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) \, dx \, dy \, dt$$

$$2 \cdot (1, 0, 0) \cdot \mathbf{T} \cdot (u, v, 1)^T - \alpha \cdot (2 \cdot u_{xx} + 2 \cdot u_{yy}) = 0$$

$$2 \cdot (0, 1, 0) \cdot \mathbf{T} \cdot (u, v, 1)^T - \alpha \cdot (2 \cdot v_{xx} + 2 \cdot v_{yy}) = 0$$

Die beiden Euler-Lagrange-Gleichungen müssen zur Berechnung der optischen Fluss-Vektoren noch diskretisiert werden.

$$\begin{aligned} & T_{[i,j,t]}^{11} \cdot u_{[i,j,t]} + T_{[i,j,t]}^{12} \cdot v_{[i,j,t]} + T_{[i,j,t]}^{13} \\ & - \frac{\alpha}{hx^2} \cdot (u_{[i+1,j,t]} - 2 \cdot u_{[i,j,t]} + u_{[i-1,j,t]}) - \frac{\alpha}{hy^2} \cdot (u_{[i,j+1,t]} - 2 \cdot u_{[i,j,t]} + u_{[i,j-1,t]}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & T_{[i,j,t]}^{12} \cdot u_{[i,j,t]} + T_{[i,j,t]}^{22} \cdot v_{[i,j,t]} + T_{[i,j,t]}^{23} \\ & - \frac{\alpha}{hx^2} \cdot (v_{[i+1,j,t]} - 2 \cdot v_{[i,j,t]} + v_{[i-1,j,t]}) - \frac{\alpha}{hy^2} \cdot (v_{[i,j+1,t]} - 2 \cdot v_{[i,j,t]} + v_{[i,j-1,t]}) = 0 \end{aligned}$$

Die erste Formel nach  $u_{[i,j,t]}$  und die zweite nach  $v_{[i,j,t]}$  aufgelöst, können wir das SOR-Verfahren anwenden und erhalten als Ergebnis das gesuchte optische Fluss-Feld zum Zeitpunkt  $t$ .

$$\ddot{u}_{[i,j,t]}^{k+1} = \frac{\frac{\alpha}{hx^2} \cdot (u_{[i+1,j,t]}^k + u_{[i-1,j,t]}^{k+1}) + \frac{\alpha}{hy^2} \cdot (u_{[i,j+1,t]}^k + u_{[i,j-1,t]}^{k+1}) - T_{[i,j,t]}^{12} \cdot v_{[i,j,t]}^k - T_{[i,j,t]}^{13}}{T_{[i,j,t]}^{11} + \frac{2 \cdot \alpha}{hx^2} + \frac{2 \cdot \alpha}{hy^2}}$$

$$\ddot{v}_{[i,j,t]}^{k+1} = \frac{\frac{\alpha}{hx^2} \cdot (v_{[i+1,j,t]}^k + v_{[i-1,j,t]}^{k+1}) + \frac{\alpha}{hy^2} \cdot (v_{[i,j+1,t]}^k + v_{[i,j-1,t]}^{k+1}) - T_{[i,j,t]}^{12} \cdot u_{[i,j,t]}^{k+1} - T_{[i,j,t]}^{23}}{T_{[i,j,t]}^{22} + \frac{2 \cdot \alpha}{hx^2} + \frac{2 \cdot \alpha}{hy^2}}$$

Lösung des Einzelschrittverfahrens für „Horn-Schunck“

$$u_{[i,j,t]}^{k+1} = (1 - \omega) \cdot u_{[i,j,t]}^k + \omega \cdot \ddot{u}_{[i,j,t]}^{k+1}$$

$$v_{[i,j,t]}^{k+1} = (1 - \omega) \cdot v_{[i,j,t]}^k + \omega \cdot \ddot{v}_{[i,j,t]}^{k+1}$$

SOR-Lösungsgleichungen

### b) „Horn-Schunck robust“ (HSR)

Die „Horn-Schunck“-Methode wird um die Bestrafungsfunktion  $\Psi(\mathbf{o}^T \mathbf{T} \mathbf{o}) = \sqrt{(\mathbf{o}^T \mathbf{T} \mathbf{o}) + \varepsilon^2}$  erweitert. Damit sollen große Abweichungen in der Konstanzannahme nicht mehr quadratisch gewertet werden, sondern nur noch linear.

$$E(u, v) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \Psi((u, v, 1) \cdot T \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}) + \alpha \cdot (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) \, dx dy dt$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen erweitern sich um die Ableitung der Bestrafungsfunktion.

$$\Psi'((u, v, 1) \cdot T \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}) \cdot 2 \cdot (1, 0, 0) \cdot T \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha \cdot (2 \cdot u_{xx} + 2 \cdot u_{yy}) = 0$$

$$\Psi'((u, v, 1) \cdot T \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}) \cdot 2 \cdot (0, 1, 0) \cdot T \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha \cdot (2 \cdot v_{xx} + 2 \cdot v_{yy}) = 0$$

Die Diskretisierung der Euler-Lagrange-Gleichungen für den Algorithmus „Horn-Schunck robust“ lautet:

$$\Psi'((u_{[i,j,t]}, v_{[i,j,t]}, 1) \cdot T_{[i,j,t]} \cdot (u_{[i,j,t]}, v_{[i,j,t]}, 1)^T) \cdot (T_{[i,j,t]}^{11} \cdot u_{[i,j,t]} + T_{[i,j,t]}^{12} \cdot v_{[i,j,t]} + T_{[i,j,t]}^{13}) - \frac{\alpha}{hx^2} \cdot (u_{[i+1,j,t]} - 2 \cdot u_{[i,j,t]} + u_{[i-1,j,t]}) - \frac{\alpha}{hy^2} \cdot (u_{[i,j+1,t]} - 2 \cdot u_{[i,j,t]} + u_{[i,j-1,t]}) = 0$$

$$\Psi'((u_{[i,j,t]}, v_{[i,j,t]}, 1) \cdot T_{[i,j,t]} \cdot (u_{[i,j,t]}, v_{[i,j,t]}, 1)^T) \cdot (T_{[i,j,t]}^{12} \cdot u_{[i,j,t]} + T_{[i,j,t]}^{22} \cdot v_{[i,j,t]} + T_{[i,j,t]}^{23}) - \frac{\alpha}{hx^2} \cdot (v_{[i+1,j,t]} - 2 \cdot v_{[i,j,t]} + v_{[i-1,j,t]}) - \frac{\alpha}{hy^2} \cdot (v_{[i,j+1,t]} - 2 \cdot v_{[i,j,t]} + v_{[i,j-1,t]}) = 0$$

Die Lösungsgleichungen zum Einzelschrittverfahren können wie folgt geschrieben werden. Zur Übersichtlichkeit schreiben wir, anstelle des kompletten Ableitungsterm, nur  $\Psi'_{[i,j,t]}$ .

$$\ddot{u}_{[i,j,t]}^{k+1} = \frac{\frac{\alpha}{hx^2} \cdot (u_{[i+1,j,t]}^k + u_{[i-1,j,t]}^{k+1}) + \frac{\alpha}{hy^2} \cdot (u_{[i,j+1,t]}^k + u_{[i,j-1,t]}^{k+1}) - (\Psi'_{[i,j,t]}^k) \cdot (T_{[i,j,t]}^{12} \cdot v_{[i,j,t]}^k + T_{[i,j,t]}^{13})}{(\Psi'_{[i,j,t]}^k \cdot T_{[i,j,t]}^{11}) + \frac{2 \cdot \alpha}{hx^2} + \frac{2 \cdot \alpha}{hy^2}}$$

$$\ddot{v}_{[i,j,t]}^{k+1} = \frac{\frac{\alpha}{hx^2} \cdot (v_{[i+1,j,t]}^k + v_{[i-1,j,t]}^{k+1}) + \frac{\alpha}{hy^2} \cdot (v_{[i,j+1,t]}^k + v_{[i,j-1,t]}^{k+1}) - (\Psi'_{[i,j,t]}^k) \cdot (T_{[i,j,t]}^{12} \cdot u_{[i,j,t]}^{k+1} + T_{[i,j,t]}^{23})}{(\Psi'_{[i,j,t]}^k \cdot T_{[i,j,t]}^{22}) + \frac{2 \cdot \alpha}{hx^2} + \frac{2 \cdot \alpha}{hy^2}}$$

Lösungsgleichungen des Einzelschrittverfahrens für „Horn-Schunck robust“

### c) „Horn-Schunck robust mit Warping“

#### i. Konstanzannahme ohne Linearisierung → Warping

Bisher wurden die Konstanzannahmen in linearisierter Form verwendet. Die nachfolgenden Algorithmen sollen die ursprünglichen Annahmen für die Helligkeitskonstanz bzw. Gradientenkonstanz beinhalten. Um dieses zu ermöglichen führen wir das sog. Warping ein, welches sich in folgende drei Schritte einteilt [BBPW, Cpcv 5.6].

1. Zuwachsrechnen (incremental computation)
2. Fixpunktiteration (fixed point iteration)
3. Grob-zu-fein Strategie (coarse-to-fine strategy)



Helligkeitskonstanz	$D_{\text{HW}}(\partial^0 f, u, v) = (f(x+u, y+v, t+1) - f(x, y, t))^2$
Gradientenkonstanz	$D_{\text{GW}}(\partial^1 f, u, v) = (f_x(x+u, y+v, t+1) - f_x(x, y, t))^2 + (f_y(x+u, y+v, t+1) - f_y(x, y, t))^2$

neue Datenterme  $D_{\text{HW}}$  und  $D_{\text{GW}}$

Die Ableitungen der Datenterme sind nicht konvex, zum eindeutigen Lösen der Euler-Lagrange-Gleichungen ist die Konvexität der Terme notwendig. Um dieses zu erreichen, führen wir folgende Gleichungen ein:

$$u^{l+1} = u^l + du^l \quad v^{l+1} = v^l + dv^l$$

Das optische Fluss-Feld  $\mathbf{o}^{l+1} = (u^{l+1}, v^{l+1})^T$  berechnet sich aus dem alten Fluss-Feld  $\mathbf{o}^l$  und einem Zuwachs, dem zu berechneten Feld  $d\mathbf{o}^l = (du^l, dv^l)^T$ . Diesen Zuwachsschritt können wir nun in einer Fixpunktiteration für die Helligkeits- und die Gradientenkonstanz verwenden. Die Euler-Lagrange-Gleichungen eines Algorithmus mit Datenterm  $D_{\text{HW}}$  und einem beliebigem Glattheitsterm  $G(u, v)$  schreiben wir nun als:

$$f_x(x+u^k, y+v^k, t+1) \cdot (f(x+u^{k+1}, y+v^{k+1}, t+1) - f(x, y, t)) - \partial_u G(u^{l+1}, v^{l+1}) = 0$$

$$f_y(x+u^k, y+v^k, t+1) \cdot (f(x+u^{k+1}, y+v^{k+1}, t+1) - f(x, y, t)) - \partial_v G(u^{l+1}, v^{l+1}) = 0$$

$\partial G(u^{l+1}, v^{l+1})$  repräsentiert hierbei die notwendigen Ableitungen des Glattheitsterm für die Euler-Lagrange-Gleichungen.

$$\partial_u G(u^{l+1}, v^{l+1}) = \frac{d}{dx} G_{u_x^{l+1}} + \frac{d}{dy} G_{u_y^{l+1}} + \frac{d}{dt} G_{u_t^{l+1}}$$

$$\partial_v G(u^{l+1}, v^{l+1}) = \frac{d}{dx} G_{v_x^{l+1}} + \frac{d}{dy} G_{v_y^{l+1}} + \frac{d}{dt} G_{v_t^{l+1}}$$

Durch die Gleichungen des Zuwachsrechnens können wir die Fluss-Komponenten  $u^{l+1}$  und  $v^{l+1}$  in der Formel  $f(x+u^{l+1}, y+v^{l+1}, t+1)$  aufspalten und mit Taylor-Linearisierung nach  $du$  und  $dv$  erhalten wir folgende Approximation.

$$\begin{aligned} f(x+u^{l+1}, y+v^{l+1}, t+1) &= f(x+u^l, y+v^l, t+1) \\ &\quad + f_x(x+u^l, y+v^l, t+1) \cdot du^l \\ &\quad + f_y(x+u^l, y+v^l, t+1) \cdot dv^l \end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen des Energiefunktionals mit Helligkeitskonstanz können wir auch in diesem Fall mit Hilfe des Bewegungstensors darstellen.

$$T_{HW}^{11'} \cdot du^l + T_{HW}^{12'} \cdot dv^l + T_{HW}^{13'} - \partial_u G(u^l, v^l) - \partial_u G(du^l, dv^l) = 0$$

$$T_{HW}^{12'} \cdot du^l + T_{HW}^{22'} \cdot dv^l + T_{HW}^{23'} - \partial_v G(u^l, v^l) - \partial_v G(du^l, dv^l) = 0$$

Dabei sei der Bewegungstensor  $T_{HW}$  definiert als:

$$T_{HW}^k(x, y, t) = T_H(x + u^l, y + v^l, t + 1)$$

Für die nicht-linearisierte Gradientenkonstanz können wir ebenfalls die Bewegungstensor-schreibweise verwenden. Wir erhalten den Tensor  $T_{GW}$  aus dem alten Tensor  $T_G$ .

$$T_{GW}^k(x, y, t) = T_G(x + u^l, y + v^l, t + 1)$$

In jedem Iterationsschritt  $l$  wird durch das numerische Lösungsverfahren SOR der optische Fluss-Vektor  $\mathbf{do}^l = (du^l, dv^l, 1)^T$  ausgerechnet.

$$du^{k+1} = (1 - \omega) \cdot du^k + \omega \cdot \ddot{u}^{k+1}$$

$$dv^{k+1} = (1 - \omega) \cdot dv^k + \omega \cdot \ddot{v}^{k+1}$$

Die Grob-zu-fein Strategie wird bei der Berechnung des optischen Flusses  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})^T$  wie folgt verwendet. Angefangen mit einer groben Auflösung zum Iterationszeitpunkt  $l = 0$ , wird in jeder Fixpunktiteration die Auflösung des Bildes  $\mathbf{f}(x, y, t)$  verfeinert. Dadurch soll verhindert werden, dass als Lösung der Gleichungen eine ungeeignete lokale Minimumstelle ausgerechnet wird. Damit haben wir die Grundidee des Warping abgeschlossen und wollen es für die nächsten Algorithmen verwenden.

## ii. Algorithmus „Horn-Schunck robust mit Warping“ (HSRW)

Das Energiefunktional der Methode „HSRW“ lautet mit Datenterm  $\mathbf{D}_W$ , stellvertretend für die Datenterme  $\mathbf{D}_{HW}$  bzw.  $\mathbf{D}_{GW}$ .

$$E(u, v) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \Psi(\mathbf{D}_W) + \alpha \cdot (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) \, dx dy dt$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen werden mit dem Bewegungstensor  $\mathbf{T}_W$  geschrieben als:

$$\Psi'(\mathbf{do}^T \cdot \mathbf{T}_W \cdot \mathbf{do}) \cdot (1,0,0) \cdot \mathbf{T}_W \cdot \mathbf{do} - \alpha \cdot (u_{xx} + u_{yy} + du_{xx} + du_{yy}) = 0$$

$$\Psi'(\mathbf{do}^T \cdot \mathbf{T}_W \cdot \mathbf{do}) \cdot (0,1,0) \cdot \mathbf{T}_W \cdot \mathbf{do} - \alpha \cdot (v_{xx} + v_{yy} + dv_{xx} + dv_{yy}) = 0$$

Obige Notation stellt die Gleichungen für den Iterationsschritt  $l$  dar. Die erste Gleichung nach  $\mathbf{du}$ , die zweite nach  $\mathbf{dv}$  aufgelöst, erhalten wir die Lösungsgleichungen des Einzelschrittverfahrens für die Fixpunktiteration zum Zeitpunkt  $l$ . Man beachte, dass hier nun zwei Indexes verwendet werden,  $k$  für das Lösen von  $\mathbf{du}$  und  $\mathbf{dv}$  durch das SOR-Verfahren und  $l$  für die Fixpunktiteration  $\mathbf{u}^{l+1} = \mathbf{u}^l + \mathbf{du}^l$  bzw.  $\mathbf{v}^{l+1} = \mathbf{v}^l + \mathbf{dv}^l$ .

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{[i,j,t]}^{k+1} &= \left( \frac{\alpha}{hx^2} \cdot (u_{[i+1,j,t]} - 2u_{[i,j,t]} + u_{[i-1,j,t]}) + du_{[i+1,j,t]}^k + du_{[i-1,j,t]}^{k+1} \right) \\ &+ \frac{\alpha}{hy^2} \cdot (u_{[i,j+1,t]} - 2u_{[i,j,t]} + u_{[i,j-1,t]}) + du_{[i,j+1,t]}^k + du_{[i,j-1,t]}^{k+1} \\ &- (\Psi'_{[i,j,t]}^k) \cdot (\mathbf{T}_{W[i,j,t]}^{12} \cdot \mathbf{dv}_{[i,j,t]}^k + \mathbf{T}_{W[i,j,t]}^{13}) \\ &/ \left( (\Psi'_{[i,j,t]}^k \cdot \mathbf{T}_{W[i,j,t]}^{11}) + \frac{2 \cdot \alpha}{hx^2} + \frac{2 \cdot \alpha}{hy^2} \right) \\ \ddot{v}_{[i,j,t]}^{k+1} &= \left( \frac{\alpha}{hx^2} \cdot (v_{[i+1,j,t]} - 2v_{[i,j,t]} + v_{[i-1,j,t]}) + dv_{[i+1,j,t]}^k + dv_{[i-1,j,t]}^{k+1} \right) \\ &+ \frac{\alpha}{hy^2} \cdot (v_{[i,j+1,t]} - 2v_{[i,j,t]} + v_{[i,j-1,t]}) + dv_{[i,j+1,t]}^k + dv_{[i,j-1,t]}^{k+1} \\ &- (\Psi'_{[i,j,t]}^k) \cdot (\mathbf{T}_{W[i,j,t]}^{12} \cdot \mathbf{du}_{[i,j,t]}^{k+1} + \mathbf{T}_{W[i,j,t]}^{13}) \\ &/ \left( (\Psi'_{[i,j,t]}^k \cdot \mathbf{T}_{W[i,j,t]}^{22}) + \frac{2 \cdot \alpha}{hx^2} + \frac{2 \cdot \alpha}{hy^2} \right) \end{aligned}$$

Lösungsgleichungen des Einzelschrittverfahrens für „HSRW“

$$\begin{aligned} \mathbf{du}^{k+1} &= (1 - \omega) \cdot \mathbf{du}^k + \omega \cdot \ddot{\mathbf{u}}^{k+1} \\ \mathbf{dv}^{k+1} &= (1 - \omega) \cdot \mathbf{dv}^k + \omega \cdot \ddot{\mathbf{v}}^{k+1} \end{aligned}$$

Iteration des SOR-Verfahrens

$$\mathbf{u}^{l+1} = \mathbf{u}^l + \mathbf{du}^l \quad \mathbf{v}^{l+1} = \mathbf{v}^l + \mathbf{dv}^l$$

Iteration des Zuwachsrechnens

### d) „Spatio-Temporal robust mit Warping“ (STRW)

Die „Horn-Schunck robust mit Warping“-Methode um die zeitliche Glattheit erweitert, erhalten wir den Algorithmus „Spatio-Temporal robust mit Warping“. Dafür wird der Glattheitsterm  $\mathbf{G}_R$  durch den Term  $\mathbf{G}_{RZ}$  im Energiefunktional ersetzt.

$$E(u, v) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \Psi(D_W) + \alpha \cdot (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + \beta \cdot (u_t^2 + v_t^2) \, dx dy dt$$

$$\Psi'(\cdot) \cdot (1, 0, 0) \cdot T_W \cdot do - \alpha \cdot (u_{xx} + u_{yy} + du_{xx} + du_{yy}) - \beta \cdot (u_{tt} + du_{tt}) = 0$$

$$\Psi'(\cdot) \cdot (0, 1, 0) \cdot T_W \cdot do - \alpha \cdot (v_{xx} + v_{yy} + dv_{xx} + dv_{yy}) - \beta \cdot (v_{tt} + dv_{tt}) = 0$$

Die obigen Euler-Lagrange-Gleichungen nach  $\mathbf{du}$  bzw.  $\mathbf{dv}$  aufgelöst, erhalten wir die notwendigen Formeln für das Einzelschrittverfahren.

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{[i,j,t]}^{k+1} = & \left( \frac{\alpha}{hx^2} \cdot (u_{[i+1,j,t]} - 2u_{[i,j,t]} + u_{[i-1,j,t]}) + du_{[i+1,j,t]}^k + du_{[i-1,j,t]}^{k+1} \right) \\ & + \frac{\alpha}{hy^2} \cdot (u_{[i,j+1,t]} - 2u_{[i,j,t]} + u_{[i,j-1,t]}) + du_{[i,j+1,t]}^k + du_{[i,j-1,t]}^{k+1} \\ & + \frac{\beta}{ht^2} \cdot (u_{[i,j,t+1]} - 2u_{[i,j,t]} + u_{[i,j,t-1]}) + du_{[i,j,t+1]}^k + du_{[i,j,t-1]}^{k+1} \\ & - (\Psi'_{[i,j,t]}^k) \cdot (T_{W[i,j,t]}^{12} \cdot dv_{[i,j,t]}^k + T_{W[i,j,t]}^{13}) \\ & / ((\Psi'_{[i,j,t]}^k \cdot T_{W[i,j,t]}^{11}) + \frac{2 \cdot \alpha}{hx^2} + \frac{2 \cdot \alpha}{hy^2} + \frac{2 \cdot \beta}{ht^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{v}_{[i,j,t]}^{k+1} = & \left( \frac{\alpha}{hx^2} \cdot (v_{[i+1,j,t]} - 2v_{[i,j,t]} + v_{[i-1,j,t]}) + dv_{[i+1,j,t]}^k + dv_{[i-1,j,t]}^{k+1} \right) \\ & + \frac{\alpha}{hy^2} \cdot (v_{[i,j+1,t]} - 2v_{[i,j,t]} + v_{[i,j-1,t]}) + dv_{[i,j+1,t]}^k + dv_{[i,j-1,t]}^{k+1} \\ & + \frac{\beta}{ht^2} \cdot (v_{[i,j,t+1]} - 2v_{[i,j,t]} + v_{[i,j,t-1]}) + dv_{[i,j,t+1]}^k + dv_{[i,j,t-1]}^{k+1} \\ & - (\Psi'_{[i,j,t]}^k) \cdot (T_{W[i,j,t]}^{12} \cdot du_{[i,j,t]}^{k+1} + T_{W[i,j,t]}^{13}) \\ & / ((\Psi'_{[i,j,t]}^k \cdot T_{W[i,j,t]}^{22}) + \frac{2 \cdot \alpha}{hx^2} + \frac{2 \cdot \alpha}{hy^2}) \end{aligned}$$

Lösungsgleichungen des Einzelschrittverfahrens für „STRW“

### e) „Particle Image Velocimetry robust mit Warping“ (PIVRW)

Der Algorithmus „Particle Image Velocimetry robust mit Warping“ verwendet den Term  $\mathbf{G}_{DW}$  als Glattheitsterm [Cp 12.2].

$$E(u, v) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \Psi(D_W) + \alpha \cdot (u_x + v_y)^2 + \beta \cdot (u_y - v_x)^2 \, dx dy dt$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen des Energiefunktionals ermöglichen das Berechnen des optischen Fluss-Feldes mit Hilfe des Warping.

$$\Psi'(\cdot) \cdot (1, 0, 0) \cdot T_W \cdot do - \alpha \cdot (u_{xx} + v_{xy} + du_{xx} + dv_{xy}) - \beta \cdot (u_{yy} - v_{xy} + du_{yy} - dv_{xy}) = 0$$

$$\Psi'(\cdot) \cdot (0, 1, 0) \cdot T_W \cdot do - \alpha \cdot (u_{xy} + v_{yy} + du_{xy} + dv_{yy}) - \beta \cdot (v_{xx} - u_{xy} + dv_{xx} - du_{xy}) = 0$$

Die angegebenen Gleichungen lassen wie folgt vereinfachen:

$$\Psi'(\cdot) \cdot (T_W^{11} du + T_W^{12} dv + T_W^{13}) - \alpha \cdot (u_{xx} + du_{xx}) - \beta \cdot (u_{yy} + du_{yy}) - (\alpha - \beta) \cdot (v_{xy} + dv_{xy}) = 0$$

$$\Psi'(\cdot) \cdot (T_W^{12} du + T_W^{22} dv + T_W^{23}) - \alpha \cdot (v_{yy} + dv_{yy}) - \beta \cdot (v_{xx} + dv_{xx}) - (\alpha - \beta) \cdot (u_{xy} + du_{xy}) = 0$$

Nach Diskretisierung der Euler-Lagrange-Gleichungen kann der optische Fluss durch das Lösungsverfahren berechnet werden.

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{[i,j,t]}^{k+1} = & \left( \frac{\alpha}{hx^2} \cdot (u_{[i+1,j,t]} - 2u_{[i,j,t]} + u_{[i-1,j,t]} + du_{[i+1,j,t]}^k + du_{[i-1,j,t]}^{k+1}) \right) \\ & + \frac{\beta}{hy^2} \cdot (u_{[i,j+1,t]} - 2u_{[i,j,t]} + u_{[i,j-1,t]} + du_{[i,j+1,t]}^k + du_{[i,j-1,t]}^{k+1}) \\ & + \frac{\alpha - \beta}{4h_x h_y} \cdot (v_{[i+1,j+1,t]} - v_{[i-1,j,t]} - v_{[i,j-1,t]} + v_{[i-1,j-1,t]}) \\ & + \frac{\alpha - \beta}{4h_x h_y} \cdot (dv_{[i+1,j+1,t]}^k - dv_{[i-1,j,t]}^k - dv_{[i,j-1,t]}^k + dv_{[i-1,j-1,t]}^k) \\ & - (\Psi'_{[i,j,t]}^k) \cdot (T_{W[i,j,t]}^{12} \cdot dv_{[i,j,t]}^k + T_{W[i,j,t]}^{13}) \\ & / \left( (\Psi'_{[i,j,t]}^k \cdot T_{W[i,j,t]}^{11}) + \frac{2 \cdot \alpha}{hx^2} + \frac{2 \cdot \alpha}{hy^2} \right) \end{aligned}$$

Lösungsgleichung der Komponente  $\mathbf{du}$

### f) „Particle Image Velocimetry 2 robust mit Warping“ (PIV2RW)

Der Glattheitsterm  $\mathbf{G}_{DW}$  berücksichtigt nur die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der optischen Fluss-Komponenten  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$ . Mit diesem Algorithmus wollen wir den Glattheitsterm erweitern, sodass die Ableitungen 2. Ordnung in der Berechnung des Fluss-Feldes verwendet werden. Hierzu gibt es zwei Möglichkeiten den Term  $\mathbf{G}_{DW}$  zu ersetzen. Entweder der neue Glattheitsterm wird folgend geschrieben,

$$\alpha \cdot \mathbf{G}_{DW2} = \alpha \cdot ((u_{xx} + v_{xy})^2 + (u_{xy} + v_{yy})^2) + \beta \cdot ((u_{xy} - v_{xx})^2 + (u_{yy} - v_{xy})^2)$$

oder der alte Term  $\mathbf{G}_{DW}$  wird um die zwei Hilfsfunktionen  $\xi(x, y, t)$  und  $\zeta(x, y, t)$  erweitert.

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \mathbf{G}_{DW2} = & \alpha \cdot (((u_x + v_y) - \xi)^2 + \lambda(\xi_x^2 + \xi_y^2)) \\ & + \beta \cdot (((u_y - v_x) - \zeta)^2 + \lambda(\zeta_x^2 + \zeta_y^2)) \end{aligned}$$

Wir wollen hier die zweite Alternative für das Energiefunktional und die Berechnung des optischen Flusses verwenden. Das Funktional wird mit dieser Methode durch insgesamt vier Funktionen  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\xi$  und  $\zeta$  minimiert.

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \xi, \zeta) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \Psi(D_W) + \alpha \cdot \mathbf{G}_{DW2} \, dx dy dt$$

Die diskretisierten Euler-Lagrange-Gleichungen nach  $\mathbf{du}$ ,  $\mathbf{dv}$ ,  $\xi$  und  $\zeta$  aufgelöst kann das optische Fluss-Feld berechnet werden.

$$\Psi'(\cdot)(T_W^{11} du^l + T_W^{12} dv^l + T_W^{13}) - \alpha \cdot u_{xx}^{l+1} - \beta \cdot u_{yy}^{l+1} - (\alpha - \beta) \cdot v_{xy}^{l+1} + \alpha \cdot \xi_x + \beta \cdot \zeta_y = 0$$

$$\Psi'(\cdot)(T_W^{12} du^l + T_W^{22} dv^l + T_W^{23}) - \alpha \cdot v_{yy}^{l+1} - \beta \cdot v_{xx}^{l+1} - (\alpha - \beta) \cdot u_{xy}^{l+1} + \alpha \cdot \xi_y - \beta \cdot \zeta_x = 0$$

$$\xi - (u_x^{l+1} + v_y^{l+1}) - \lambda \cdot (\xi_{xx} + \xi_{yy}) = 0$$

$$\zeta - (u_y^{l+1} - v_x^{l+1}) - \lambda \cdot (\zeta_{xx} + \zeta_{yy}) = 0$$

$$\xi_{[i,j,t]} = \frac{\left( \frac{u_{[i+1,j,t]} - u_{[i-1,j,t]}}{2 \cdot h_x} + \frac{v_{[i,j+1,t]} - v_{[i,j-1,t]}}{2 \cdot h_y} \right) + \left( \frac{\xi_{[i+1,j,t]} + \xi_{[i-1,j,t]}}{h_x^2} + \frac{\xi_{[i,j+1,t]} + \xi_{[i,j-1,t]}}{h_y^2} \right)}{1 + \frac{2 \cdot \lambda}{h_x^2} + \frac{2 \cdot \lambda}{h_y^2}}$$

Lösungsgleichung für die Hilfsfunktion  $\xi$

## 4. Testfälle

In diesem Kapitel wollen wir die Algorithmen auf die drei Testsequenzen anwenden und nach verschiedenen Kriterien die beste Formel auswählen. Für die einzelnen Abfolgen gilt, dass zunächst ein Bereich aus dem Bild ausgewählt wird, der über die komplette Zeit viele Partikel beinhaltet. Zudem werden die Bilder mit einem Gauß-Kern  $K_\sigma$  mit Standardabweichung  $\sigma$  geglättet. Die Glättung reduziert unter anderem Störungen im Bild, die die Berechnungen beeinflussen können [Bruhn 2.1]. Damit haben wir insgesamt vier Parameter,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  und  $\sigma$ , zur optischen Fluss-Berechnung. Beginnen wir mit den Kohlepartikeln, danach folgen die Partikel der Größe 1  $\mu\text{m}$  und zuletzt die Partikel der Größe 100 nm.

### a) Kohlepartikel

Als erste Testsequenz verwenden wir Aufnahmen von Kohlepartikeln mit Größen zwischen 1 und 100 Mikrometern. Die Sequenz besteht aus 91 Bildern und dauert 18,283 Sekunden, die Bilderrate beträgt 295,36 Bilder pro Minute. Die Auflösung ist  $1,5625 \cdot 10^3$  mm/Pixel. Das Auswahlfeld ist  $(230,37) \times (377,428)$ .

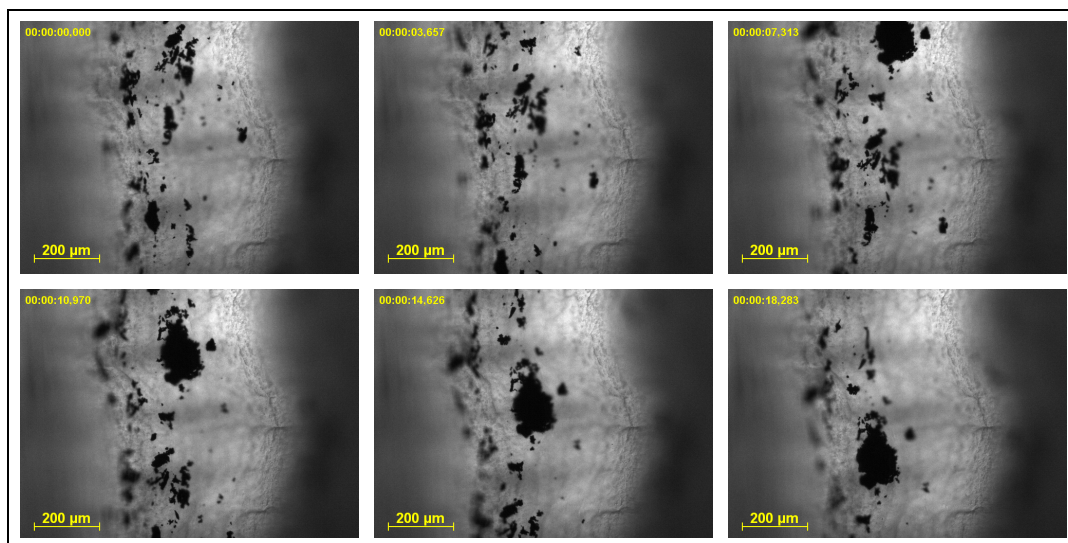


Bild 1, 19, 37, 55, 73 und 91 der Sequenz

Für die durchschnittliche Geschwindigkeit wurden 10 Partikel beobachtet. Die gemessene Bewegungsrate der gesamten Bilderabfolge beträgt 2,46 mm/Min. Die Geschwindigkeiten der Teilsequenzen liegen im Bereich von 92% bis 105% der Durchschnittsgeschwindigkeit.

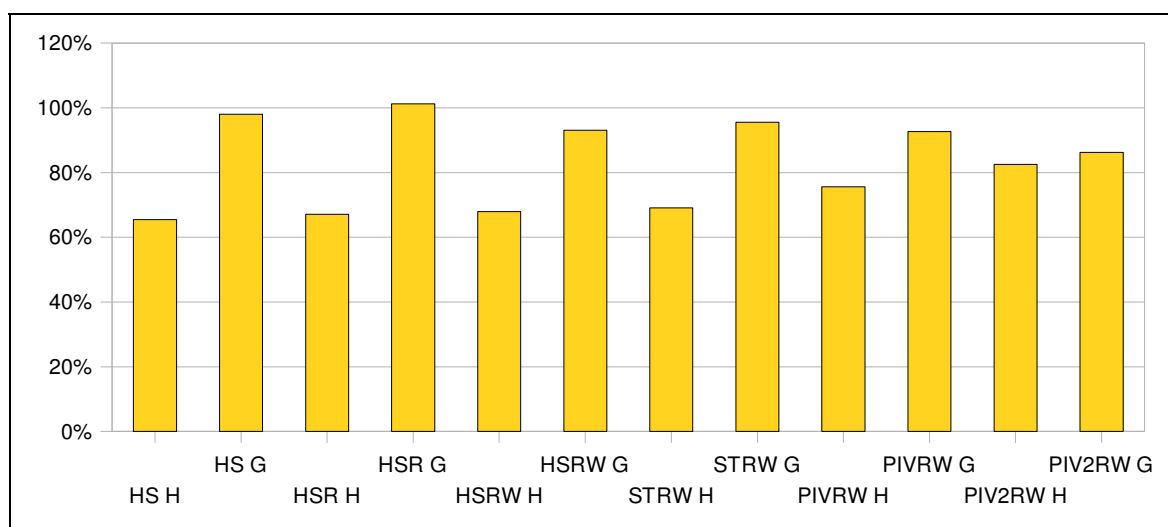
Bilder	1-91	1-11	11-21	21-31	31-41	41-51	51-61	61-71	71-81	81-91
mm/Min	2,46	2,27	2,38	2,46	2,52	2,44	2,48	2,43	2,58	2,55

Kommen wir nun zu den Ergebnissen der optischen Fluss-Algorithmen. Die folgende Tabelle zeigt die Parameterwerte und die Durchschnittsgeschwindigkeiten der einzelnen Berechnungen.

Algorithmen	Parameter				mm/Min
	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$	$\sigma$	
HS mit Helligkeitskonstanz (HS H)	151			8.3	1,61
HS mit Gradientenkonstanz (HS G)	95			4.4	2,41
HSR mit Helligkeitskonstanz (HSR H)	151			8.3	1,65
HSR mit Gradientenkonstanz (HSR G)	95			4.4	2,49
HSRW mit Helligkeitskonstanz (HSRW H)	151			8.3	1,67
HSRW mit Gradientenkonstanz (HSRW G)	95			4.4	2,29
STRW mit Helligkeitskonstanz (STRW H)	151	20		8.3	1,70
STRW mit Gradientenkonstanz (STRW G)	95	20		4.4	2,35
PIVRW mit Helligkeitskonstanz (PIVRW H)	151	302		8.3	1,86
PIVRW mit Gradientenkonstanz (PIVRW G)	95	190		4.4	2,28
PIV2RW mit Helligkeitskonstanz (PIV2RW H)	151	302	100	8.3	2,03
PIV2RW mit Gradientenkonstanz (PIV2RW G)	95	190	100	4.4	2,12

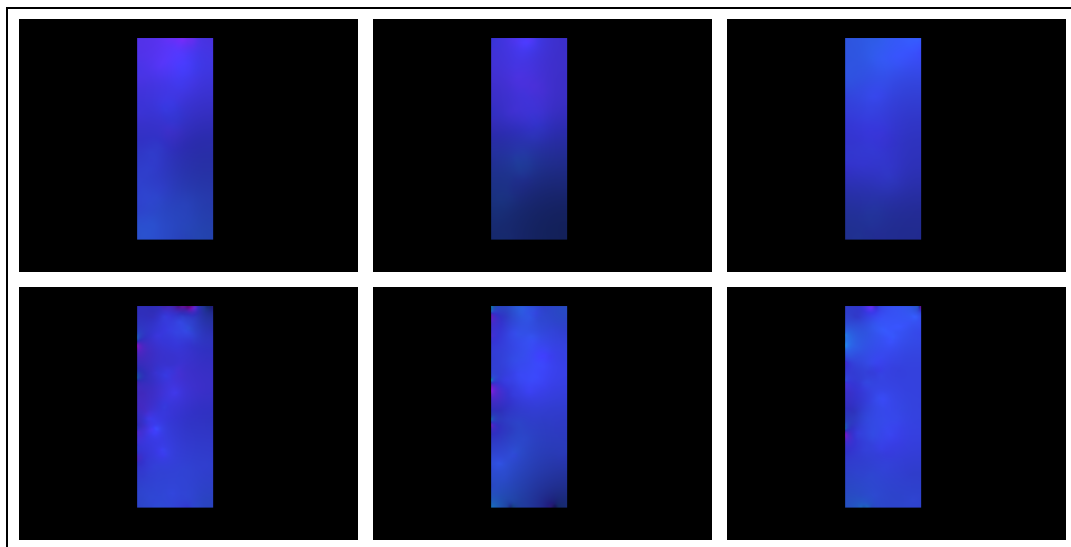
Tabelle mit Parameterwerten und berechneter Geschwindigkeit

Schon auf den ersten Blick sind große Abweichungen zu erkennen. Die untere Grafik verdeutlicht die Unterschiede, wobei zu erkennen ist, dass die Algorithmen mit Gradientenkonstanz  $D_G$  besser abschneiden als die mit Helligkeitskonstanz  $D_H$ .



berechnete Geschwindigkeit im Verhältnis zur gemessenen Geschwindigkeit





optischer Fluss berechnet durch „HS H“ (oben), „HSR G“ (unten) von Bild 1, 19 und 37

Für die weitere Analyse beschränken wir uns auf die sechs besten Algorithmen. Nach der Betrachtung der durchschnittlichen Geschwindigkeit über die gesamte Bilderfolge, wollen wir uns noch auf Teilsequenzen konzentrieren. Dazu wird die Abfolge in neun Teile zu je zehn optischen Fluss-Feldern aufgeteilt. Als Bewertungsmaß wollen wir die prozentuale Abweichung der berechneten zur gemessenen Bewegungsrate in dem jeweiligen Teilabschnitt nehmen (Spalte „Abweichung in %“). Zusätzlich werden die Abweichungen der Teilgeschwindigkeiten zur Gesamtgeschwindigkeit angegeben.

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	HS G	Von Hand		HS G	Von Hand
1-91	2,41	2,46	- 2,03		
1-11	2,19	2,27	- 3,52	- 9,13	- 7,72
11-21	2,35	2,38	- 1,26	- 2,49	- 3,25
21-31	2,35	2,46	- 4,47	- 2,49	0,00
31-41	2,59	2,52	2,78	7,47	2,44
41-51	2,50	2,44	2,46	3,73	- 0,81
51-61	2,54	2,48	2,42	5,39	0,81
61-71	2,42	2,43	- 0,41	0,41	- 1,22
71-81	2,54	2,58	- 1,55	5,39	4,88
81-91	2,22	2,55	- 12,94	- 7,88	3,66

Horn-Schunck - Gradientenkonstanz

Die Werte liegen, bis auf die letzte Teilsequenz mit -13%, im Bereich von -5% bis +3%.

Die nächsten Werte wurden mit „Horn-Schunck robust“ (HSR G) und „Horn-Schunck robust mit Warping“ (HSRW G) berechnet. Wenn man, wie bei dem vorherigen Algorithmus „Horn-Schunck“, die letzte Teilsequenz nicht berücksichtigt, liegen die prozentualen Abweichungen zwischen -2% und +6% bzw. -8% und -4%.

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	HSR G	Von Hand		HSR G	Von Hand
1-91	2,49	2,46	1,22		
1-11	2,24	2,27	- 1,32	- 10,04	- 7,72
11-21	2,44	2,38	2,52	- 2,01	- 3,25
21-31	2,45	2,46	- 0,41	- 1,61	0,00
31-41	2,67	2,52	5,95	7,23	2,44
41-51	2,55	2,44	4,51	2,41	- 0,81
51-61	2,60	2,48	4,84	4,42	0,81
61-71	2,49	2,43	2,47	0,00	- 1,22
71-81	2,66	2,58	3,10	6,83	4,88
81-91	2,34	2,55	- 8,24	- 6,02	3,66

Horn-Schunck robust – Gradientenkonstanz

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	HSRW G	Von Hand		HSRW G	Von Hand
1-91	2,29	2,46	- 6,91		
1-11	2,10	2,27	- 7,49	- 8,30	- 7,72
11-21	2,28	2,38	- 4,20	- 0,44	- 3,25
21-31	2,28	2,46	- 7,32	- 0,44	0,00
31-41	2,41	2,52	- 4,37	5,24	2,44
41-51	2,31	2,44	- 5,33	0,87	- 0,81
51-61	2,34	2,48	- 5,65	2,18	0,81
61-71	2,28	2,43	- 6,17	- 0,44	- 1,22
71-81	2,42	2,58	- 6,20	5,68	4,88
81-91	2,19	2,55	- 14,12	- 4,37	3,66

Horn-Schunck robust mit Warping – Gradientenkonstanz

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	STRW G	Von Hand		STRW G	Von Hand
1-91	2,35	2,46	- 4,47		
1-11	2,17	2,27	- 4,41	- 7,66	- 7,72
11-21	2,33	2,38	- 2,10	- 0,85	- 3,25
21-31	2,38	2,46	- 3,25	1,28	0,00
31-41	2,43	2,52	- 3,57	3,40	2,44
41-51	2,38	2,44	- 2,46	1,28	- 0,81
51-61	2,41	2,48	- 2,82	2,55	0,81
61-71	2,34	2,43	- 3,70	- 0,43	- 1,22
71-81	2,46	2,58	- 4,65	4,68	4,88
81-91	2,25	2,55	- 11,76	- 4,26	3,66

Spatio-Temporal robust mit Warping – Gradientenkonstanz

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	PIVRW G	Von Hand		PIVRW G	Von Hand
1-91	2,28	2,46	- 7,32		
1-11	2,10	2,27	- 7,49	- 7,89	- 7,72
11-21	2,25	2,38	- 5,46	- 1,32	- 3,25
21-31	2,25	2,46	- 8,54	- 1,32	0,00
31-41	2,42	2,52	- 3,97	6,14	2,44
41-51	2,31	2,44	- 5,33	1,32	- 0,81
51-61	2,35	2,48	- 5,24	3,07	0,81
61-71	2,28	2,43	- 6,17	0,00	- 1,22
71-81	2,42	2,58	- 6,20	6,14	4,88
81-91	2,16	2,55	- 15,29	- 5,26	3,66

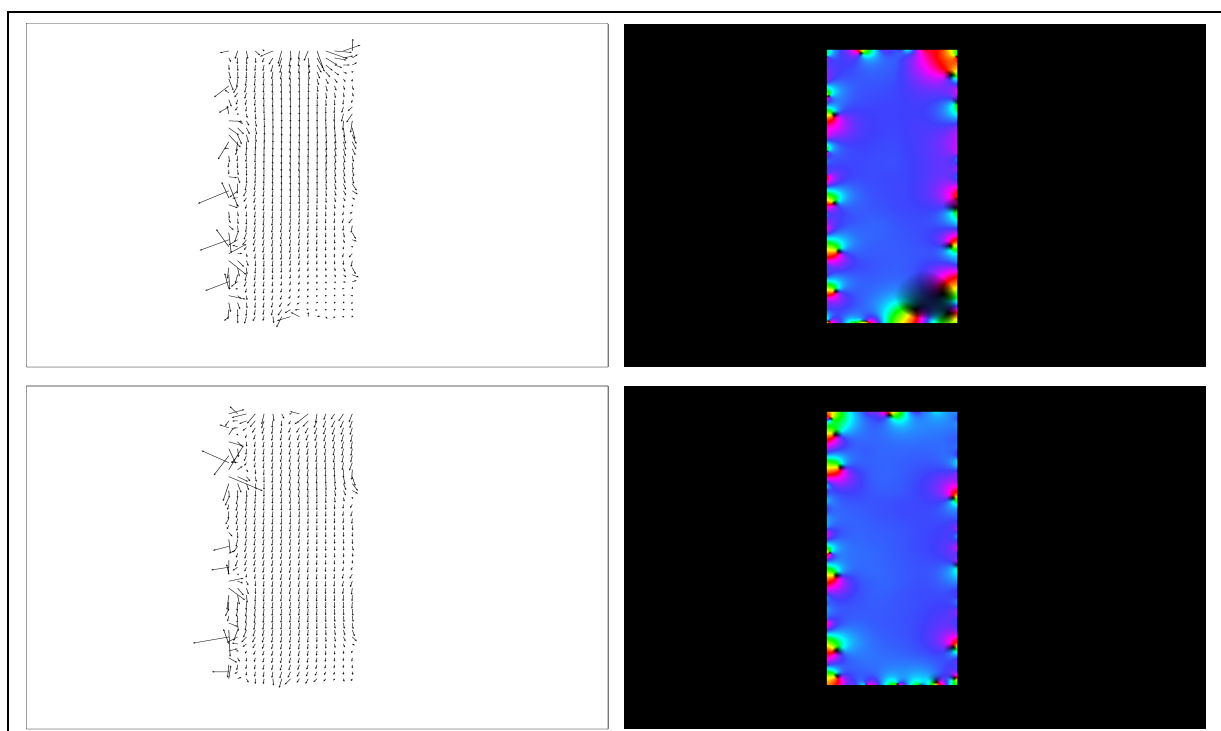
Particle Image Velocimetry robust mit Warping - Gradientenkonstanz

Für den Algorithmus „Spatio-Temporal robust mit Warping“ erhalten wir Abweichungen im Bereich von -5% bis -2%. Für die Methode „Particle Image Velocimetry robust mit Warping“ liegt der Bereich zwischen -8% und -4%. Obwohl das „STRW“-Verfahren in der totalen Durchschnittsgeschwindigkeit an dritter Stelle liegt, liefert es für die Teilsequenzen den bisher kleinsten Abweichungsbereich.

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	PIV2RW G	Von Hand		PIV2RW G	Von Hand
1-91	2,12	2,46	- 13,82		
1-11	1,93	2,27	- 14,98	- 8,96	- 7,72
11-21	2,00	2,38	- 15,97	- 5,66	- 3,25
21-31	2,01	2,46	- 18,29	- 5,19	0,00
31-41	2,28	2,52	- 9,52	7,55	2,44
41-51	2,21	2,44	- 9,43	4,25	- 0,81
51-61	2,28	2,48	- 8,06	7,55	0,81
61-71	2,20	2,43	- 9,47	3,77	- 1,22
71-81	2,29	2,58	- 11,24	8,02	4,88
81-91	1,90	2,55	- 25,49	- 10,38	3,66

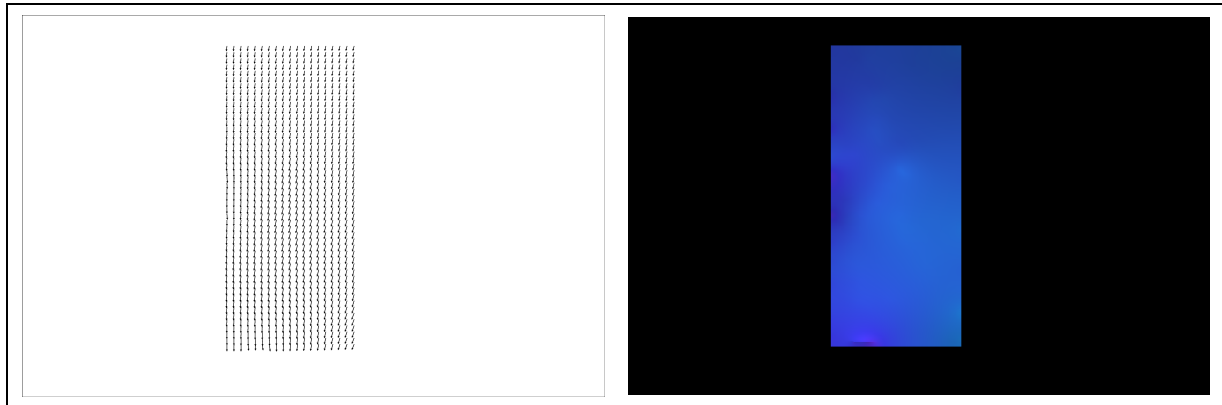
Particle Image Velocimetry 2 robust mit Warping - Gradientenkonstanz

Die Methode „Particle Image Velocimetry 2 robust mit Warping“ liefert mit knapp 86% den schlechtesten Wert aller Algorithmen mit Gradientenkonstanz. Die Teilgeschwindigkeiten aller Abschnitte sind mit Werten von 82% bis 92% unterschätzt.



optisches Fluss-Feld 21 (oben) und 47 (unten) „PIV2RW G“

In den Darstellungen der Fluss-Felder von „PIV2RW G“ sind optische Fluss-Vektoren zu erkennen, die nicht in das Muster der anderen Vektoren passen. Der Glattheitsterm  $G_{DW2}$  eignet sich nicht für diese Partikelaufnahmen. Betrachten wir die optischen Fluss-Felder der anderen Algorithmen, sind keine Fluss-Vektoren zu erkennen, die die Geschwindigkeit stark beeinflussen können. Die Vektoren ergeben ein gleichmäßiges Fluss-Feld.

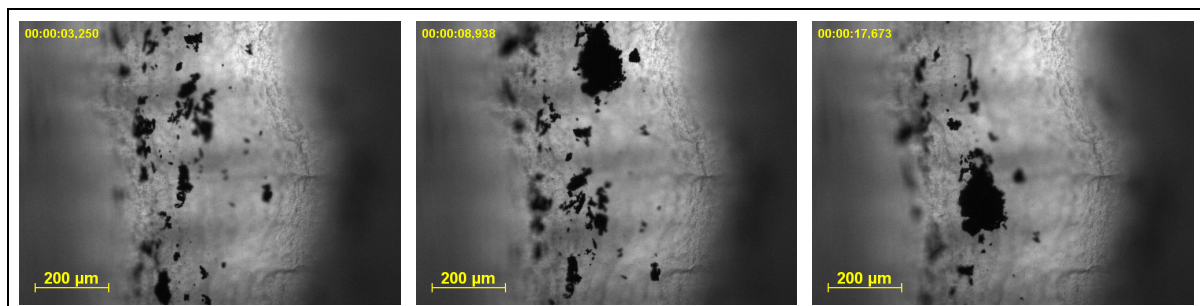


optisches Fluss-Feld 88 berechnet durch HSRW G

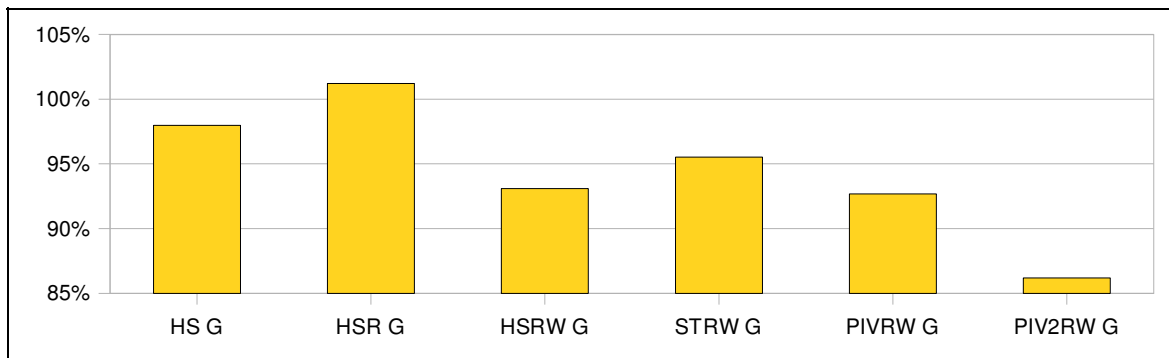
In der letzten Teilsequenz haben wir Abweichungen in der Geschwindigkeit von -25% bis -8%. Der Geschwindigkeitsunterschied lässt sich dadurch begründen, dass sich in den letzten Bildern die Anzahl der Partikel verringert hat, besonders im oberen Bereich und folglich weniger Informationen über die Bewegung vorliegen. Die Länge der optischen Fluss-Vektoren ist kürzer als notwendig, um die korrekte Geschwindigkeit anzuzeigen. Bei der Berechnung der optischen Fluss-Felder sollte deshalb beachtet werden, dass sich eine hohe Anzahl von Partikeln im Auswahlfeld befinden.

	HS G	HSR G	HSRW G	STRW G	PIVRW G	PIV2RW G
mm/Min	2,22	2,34	2,19	2,25	2,16	1,90
% Abw.	- 12,94	- 8,24	- 14,12	- 11,76	- 15,29	- 25,49

Geschwindigkeit für Teilsequenz „81-91“

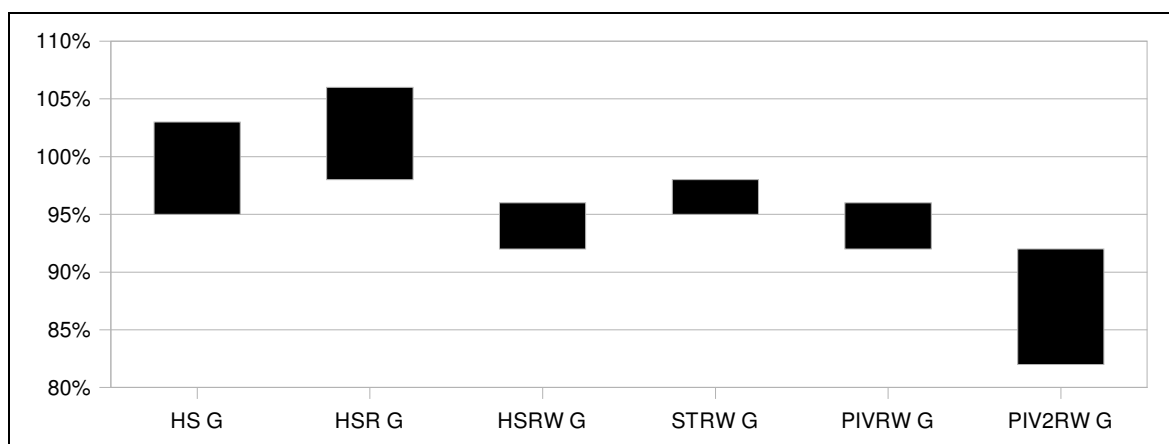


Bilder 17, 45 und 88 der Kohlesequenz



berechnete Geschwindigkeit im Verhältnis zur gemessenen Geschwindigkeit

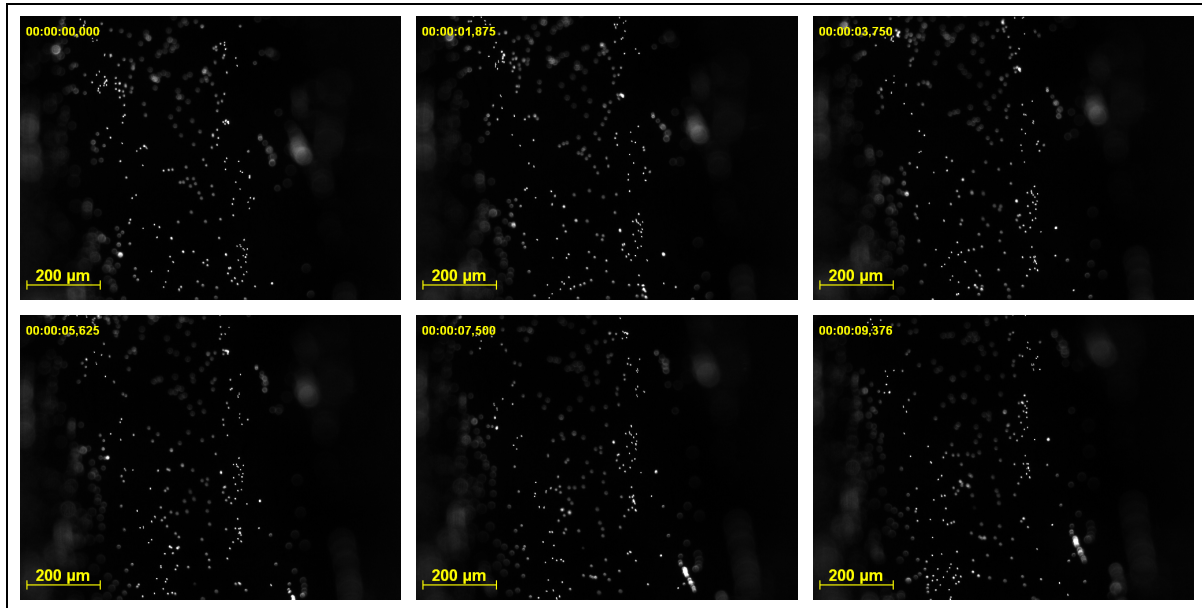
Die obere Grafik zeigt die errechnete Durchschnittsgeschwindigkeit an, die untere Grafik zeigt noch einmal die prozentualen Abweichungen der einzelnen Geschwindigkeiten in den Teilsequenzen, ohne Teilsequenz 81-91.



prozentuale Abweichungen der Teilsequenzen

Eine eindeutige Wahl für den besten Algorithmus ist schwer, da jeder seine Vor- und Nachteile hat. Die genaueste Durchschnittsgeschwindigkeit, mit einer Abweichung von etwas mehr als 1% liefert die „HSR G“-Methode. Die Abweichungen der Teilgeschwindigkeiten variieren um insgesamt 8%, wie bei der „HS G“-Methode, die einen Unterschied zur gemessenen Bewegungsrate von -2% hat. Den größten Unterschied zur totalen Geschwindigkeit hat mit fast -14% der Algorithmus „Particle Image Velocimetry 2 robust mit Warping“. Für „HSRW G“ und „PIVRW G“ wird die gemessene Bewegungsrate zu 93% erreicht. Der Bereich, in dem die Abweichungen der Teilabschnitte liegen, hat für beide Methoden eine Größe von 4%. Den kleinsten Schwankungsbereich mit 3% erreicht der „STRW G“-Algorithmus. Die errechneten Teilgeschwindigkeiten liegen bei 95% bis 98% der gemessenen Bewegungsraten in den Teilsequenzen und bei der Gesamtgeschwindigkeit wird eine Genauigkeit von 95,5% erreicht. Bevor wir uns auf einen Algorithmus festlegen, wollen wir noch die anderen Testfälle betrachten.

**b) Partikel der Größe 1 Mikrometer**

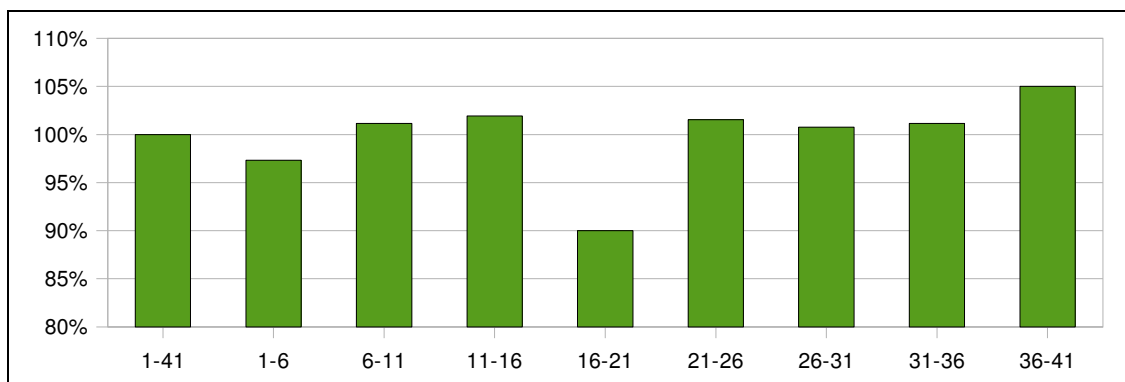


Bilder 1, 9, 17, 25, 33 und 41 der Sequenz

Diese Testsequenz beinhaltet 41 Bilder mit fluoreszierenden Partikeln der Größe 1 Mikrometer. Die Bilderrate beträgt 255,97 Bilder pro Minute. Das Auswahlfeld hat als linke obere Ecke den Punkt (162, 80) und als rechte untere Ecke den Punkt (409, 440). Die gesamte Sequenz wird in acht Teile mit je sechs Bilder geteilt, daraus ergeben sich in jedem Abschnitt fünf Geschwindigkeiten. Für die totale Bewegungsrate und die Zwischengeschwindigkeiten werden folgende Werte gemessen.

Bilder	1-41	1-6	6-11	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36	36-41
mm/Min	2,60	2,53	2,63	2,65	2,34	2,64	2,62	2,63	2,73

Folgende Grafik veranschaulicht die Unterschiede der Bewegungsraten der einzelnen Teilabschnitte im Verhältnis zur Durchschnittsgeschwindigkeit der gesamten Sequenz.



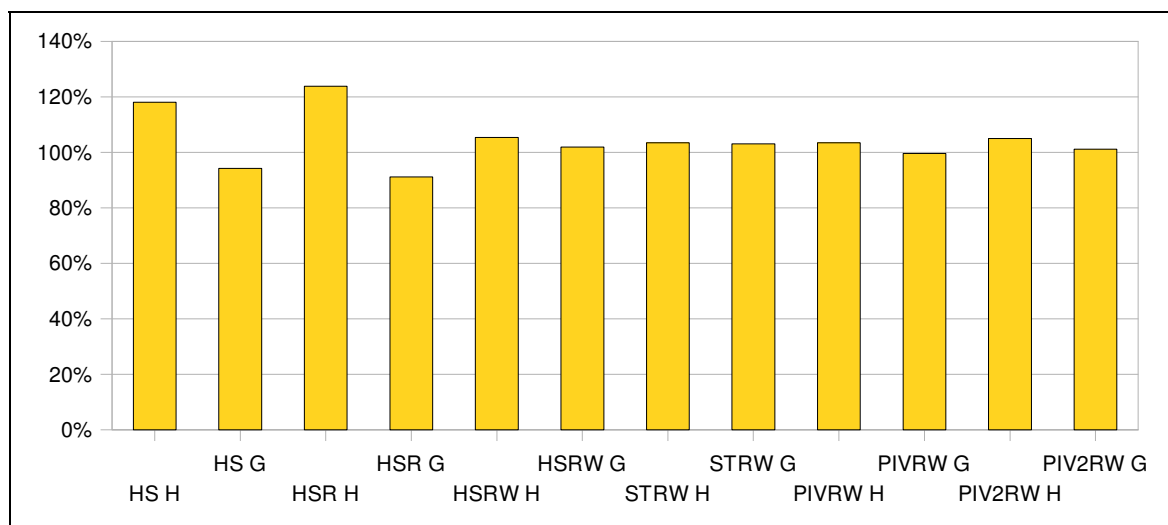
Teilgeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Gesamtgeschwindigkeit

Zur Berechnung des optischen Flusses und der Gesamtgeschwindigkeit sind folgende Parametereinstellungen verwendet worden.

Algorithmen	Parameter				mm/Min
	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$	$\sigma$	
HS mit Helligkeitskonstanz (HS H)	100			4.3	3,07
HS mit Gradientenkonstanz (HS G)	100			3,4	2,45
HSR mit Helligkeitskonstanz (HSR H)	100			4.3	3,22
HSR mit Gradientenkonstanz (HSR G)	100			3.4	2,37
HSRW mit Helligkeitskonstanz (HSRW H)	100			4.3	2,74
HSRW mit Gradientenkonstanz (HSRW G)	100			1,7	2,65
STRW mit Helligkeitskonstanz (STRW H)	100	200		4.3	2,69
STRW mit Gradientenkonstanz (STRW G)	100	200		1.7	2,68
PIVRW mit Helligkeitskonstanz (PIVRW H)	100	20		4.3	2,69
PIVRW mit Gradientenkonstanz (PIVRW G)	100	200		1.7	2,59
PIV2RW mit Helligkeitskonstanz (PIV2RW H)	10	20	100	4.3	2,73
PIV2RW mit Gradientenkonstanz (PIV2RW G)	10	20	100	1.7	2,63

Tabelle mit Parameterwerten und berechneter Geschwindigkeit

Bei den Algorithmen mit Warping ist zwischen den Konstanzannahmen kaum ein Unterschied zu erkennen. Die größten Abweichungen haben der „Horn-Schunck“ und der „Horn-Schunck robust“ mit Helligkeitskonstanz. Diese zwei Verfahren wollen wir in der weiteren Analyse dieser Testsequenz vernachlässigen.



berechnete Geschwindigkeit im Verhältnis zur gemessenen Geschwindigkeit



Wie in der letzten Testsequenz, betrachten wir nun Teilabschnitte. Die Sequenz wird in acht Bereiche zu je fünf optischen Fluss-Feldern aufgeteilt.

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	HS G	Von Hand		HS G	Von Hand
1-41	2,45	2,60	- 5,77		
1- 6	2,54	2,53	0,40	3,67	- 2,69
6-11	2,57	2,63	- 2,28	4,90	1,15
11-16	2,53	2,65	- 4,53	3,27	1,92
16-21	2,48	2,34	5,98	1,22	- 10,00
21-26	2,44	2,64	- 7,58	- 0,41	1,54
26-31	2,45	2,62	- 6,49	0,00	0,77
31-36	2,39	2,63	- 9,13	- 2,45	1,15
36-41	2,21	2,73	- 19,05	- 9,80	5,00

Horn-Schunck – Gradientenkonstanz

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	HSR G	Von Hand		HSR G	Von Hand
1-41	2,37	2,60	- 8,85		
1- 6	2,58	2,53	1,98	8,86	- 2,69
6-11	2,54	2,63	- 3,42	7,17	1,15
11-16	2,42	2,65	- 8,68	2,11	1,92
16-21	2,40	2,34	2,56	1,27	- 10,00
21-26	2,35	2,64	- 10,98	- 0,84	1,54
26-31	2,38	2,62	- 9,16	0,42	0,77
31-36	2,27	2,63	- 13,69	- 4,22	1,15
36-41	1,99	2,73	- 27,11	- 16,03	5,00

Horn-Schunck robust – Gradientenkonstanz

Beide „Horn-Schunck“-Methoden ohne Warming haben die größten Abweichungen in der Bewegungsrate, sie erreichen nur 94% bzw. 91% der gemessenen Geschwindigkeit. In den Teilsequenzen weichen die berechneten Werte um -20% bis +6% bei „Horn-Schunck“ und um -27% bis +3% bei „Horn-Schunck robust“ von den erwarteten Werten ab.

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	HSRW H	Von Hand		HSRW H	Von Hand
1-41	2,74	2,60	5,38		
1- 6	2,42	2,53	- 4,35	- 11,68	- 2,69
6-11	2,63	2,63	0,00	- 4,01	1,15
11-16	2,76	2,65	4,15	0,73	1,92
16-21	2,61	2,34	11,54	- 4,74	- 10,00
21-26	2,72	2,64	3,03	- 0,73	1,54
26-31	2,75	2,62	4,96	0,36	0,77
31-36	2,98	2,63	13,31	8,76	1,15
36-41	3,06	2,73	12,09	11,68	5,00

Horn-Schunck robust mit Warping – Helligkeitskonstanz

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	HSRW G	Von Hand		HSRW G	Von Hand
1-41	2,65	2,60	1,92		
1- 6	2,36	2,53	- 6,72	- 10,94	- 2,69
6-11	2,54	2,63	- 3,42	- 4,15	1,15
11-16	2,59	2,65	- 2,26	- 2,26	1,92
16-21	2,57	2,34	9,83	- 3,02	- 10,00
21-26	2,64	2,64	0,00	- 0,38	1,54
26-31	2,71	2,62	3,44	2,26	0,77
31-36	2,82	2,63	7,22	6,42	1,15
36-41	2,96	2,73	8,42	11,70	5,00

Horn-Schunck robust mit Warping – Gradientenkonstanz

Bei der Methode „Horn-Schunck robust mit Warping“ erreichen wir mit der Gradientenkonstanz einen besseren Durchschnittswert als mit der Helligkeitskonstanz. Anstatt 95% werden 98% der Gesamtgeschwindigkeit erzielt. Zudem wurden fünf optische Fluss-Felder bei „HSRW H“ nicht berücksichtigt, da sie Werte von 10 mm/Min bis 43 mm/Min geliefert haben. Die Unterschiede in den Teilabschnitten liegen zwischen -4% und +13% bei „HSRW H“ und bei „HSRW G“ haben wir einen Bereich von -7% bis +10%.

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	STRW H	Von Hand		STRW H	Von Hand
1-41	2,69	2,60	3,46		
1- 6	2,45	2,53	- 3,16	- 8,92	- 2,69
6-11	2,58	2,63	- 1,90	- 4,09	1,15
11-16	2,65	2,65	0,00	- 1,49	1,92
16-21	2,61	2,34	11,54	- 2,97	- 10,00
21-26	2,69	2,64	1,89	0,00	1,54
26-31	2,74	2,62	4,58	1,86	0,77
31-36	2,84	2,63	7,98	5,58	1,15
36-41	2,99	2,73	9,52	11,15	5,00

Spatio-Temporal robust mit Warping – Helligkeitskonstanz

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	STRW G	Von Hand		STRW G	Von Hand
1-41	2,68	2,60	3,08		
1- 6	2,44	2,53	- 3,56	- 8,96	- 2,69
6-11	2,56	2,63	- 2,66	- 4,48	1,15
11-16	2,63	2,65	- 0,75	- 1,87	1,92
16-21	2,61	2,34	11,54	- 2,61	- 10,00
21-26	2,69	2,64	1,89	0,37	1,54
26-31	2,74	2,62	4,58	2,24	0,77
31-36	2,84	2,63	7,98	5,97	1,15
36-41	2,89	2,73	5,86	7,84	5,00

Spatio-Temporal robust mit Warping – Gradientenkonstanz

Die zwei räumlich-zeitlichen Varianten erreichen fast gleiche Werte von knapp 97%. Auch die Abweichungen in den Teilsequenzen sind nahezu identisch mit -3% bis +12% für „STRW H“ und mit -4% bis +12% bei „STRW G“.

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	PIVRW H	Von Hand		PIVRW H	Von Hand
1-41	2,69	2,60	3,46		
1- 6	2,42	2,53	- 4,35	- 10,04	- 2,69
6-11	2,59	2,63	- 1,52	- 3,72	1,15
11-16	2,63	2,65	- 0,75	- 2,23	1,92
16-21	2,60	2,34	11,11	- 3,35	- 10,00
21-26	2,69	2,64	1,89	0,00	1,54
26-31	2,74	2,62	4,58	1,86	0,77
31-36	2,86	2,63	8,75	6,32	1,15
36-41	3,02	2,73	10,62	12,27	5,00

Particle Image Velocimetry robust mit Warping – Helligkeitskonstanz

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	PIVRW G	Von Hand		PIVRW G	Von Hand
1-41	2,59	2,60	- 0,38		
1- 6	2,37	2,53	- 6,32	- 8,49	- 2,69
6-11	2,52	2,63	- 4,18	- 2,70	1,15
11-16	2,57	2,65	- 3,02	- 0,77	1,92
16-21	2,45	2,34	4,70	- 5,41	- 10,00
21-26	2,61	2,64	- 1,14	0,77	1,54
26-31	2,69	2,62	2,67	3,86	0,77
31-36	2,75	2,63	4,56	6,18	1,15
36-41	2,77	2,73	1,47	6,95	5,00

Particle Image Velocimetry robust mit Warping – Gradientenkonstanz

„PIVRW H“ erreicht die gleiche Abweichung wie „STRW H“ in der Gesamtgeschwindigkeit. Der Schwankungsbereich liegt zwischen -4% und +11% für die Teilsequenzen. Der „PIVRW“-Algorithmus mit Gradientenkonstanz erreicht die bisher geringste Abweichung von weniger als -1%. Auch der Wertebereich in dem sich die Teilgeschwindigkeiten bewegen, fällt mit Werten zwischen -6% und +5% am kleinsten aus.

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	PIV2RW H	Von Hand		PIV2RW H	Von Hand
1-41	2,73	2,60	5,00		
1- 6	2,43	2,53	- 3,95	- 10,99	- 2,69
6-11	2,63	2,63	0,00	- 3,66	1,15
11-16	2,68	2,65	1,13	- 1,83	1,92
16-21	2,64	2,34	12,82	- 3,30	- 10,00
21-26	2,71	2,64	2,65	- 0,73	1,54
26-31	2,78	2,62	6,11	1,83	0,77
31-36	2,88	2,63	9,51	5,49	1,15
36-41	3,05	2,73	11,72	11,72	5,00

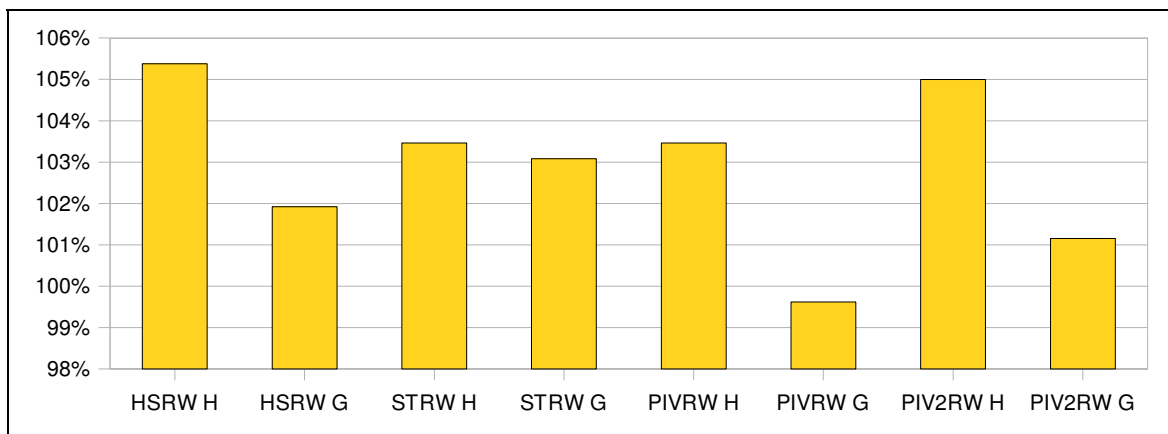
Particle Image Velocimetry 2 robust mit Warping – Helligkeitskonstanz

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	PIV2RW G	Von Hand		PIV2RW G	Von Hand
1-41	2,63	2,60	1,15		
1- 6	2,42	2,53	- 4,35	- 7,98	- 2,69
6-11	2,57	2,63	- 2,28	- 2,28	1,15
11-16	2,62	2,65	- 1,13	- 0,38	1,92
16-21	2,50	2,34	6,84	- 4,94	- 10,00
21-26	2,66	2,64	0,76	1,14	1,54
26-31	2,71	2,62	3,44	3,04	0,77
31-36	2,78	2,63	5,70	5,70	1,15
36-41	2,81	2,73	2,93	6,84	5,00

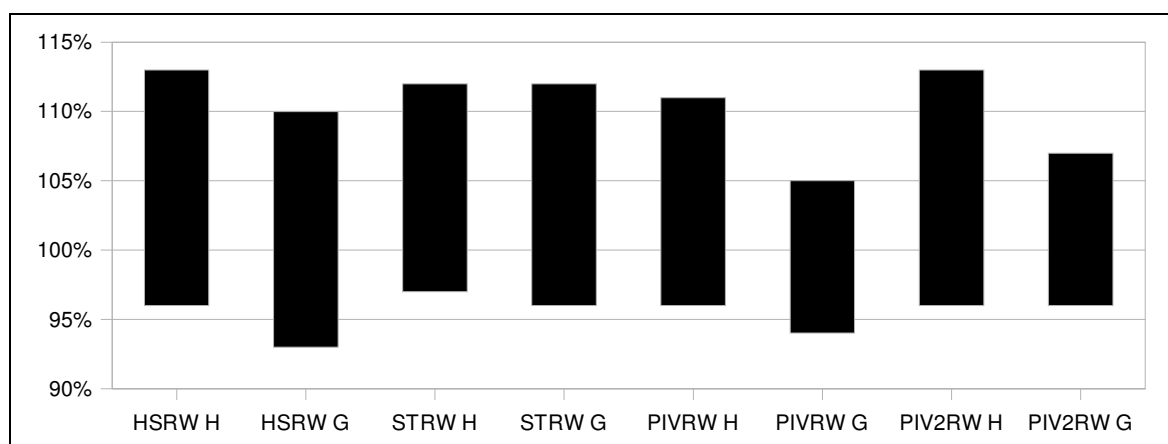
Particle Image Velocimetry 2 robust mit Warping – Gradientenkonstanz

Bei den „PIV2RW“-Methoden haben wir im ersten Fall eine Genauigkeit von 95%, die Gradientenkonstanz liefert den zweitbesten Wert in diesem Testfall von 1,15%. Der Algorithmus mit Helligkeitskonstanz hat in den Teilabschnitten Abweichungen von -4% bis +13%. Mit der Gradientenkonstanz erhalten wir als oberen Abweichungswert +7%.

Folgende Grafiken veranschaulichen die Abweichungen der einzelnen Methoden. Der Algorithmus „Particle Image Velocimetry robust mit Warping“ liefert mit der Gradientenkonstanz das beste Ergebnis. Die Abweichung zur Gesamtgeschwindigkeit beträgt -0,38% und in den Teilsequenzen werden 94% bis 105% der gemessenen Teilgeschwindigkeiten erreicht. Die Werte für die „Horn-Schunck“-Methoden ohne Warping werden nicht dargestellt, da diese am schlechtesten sind, mit Abweichungen über 9%.



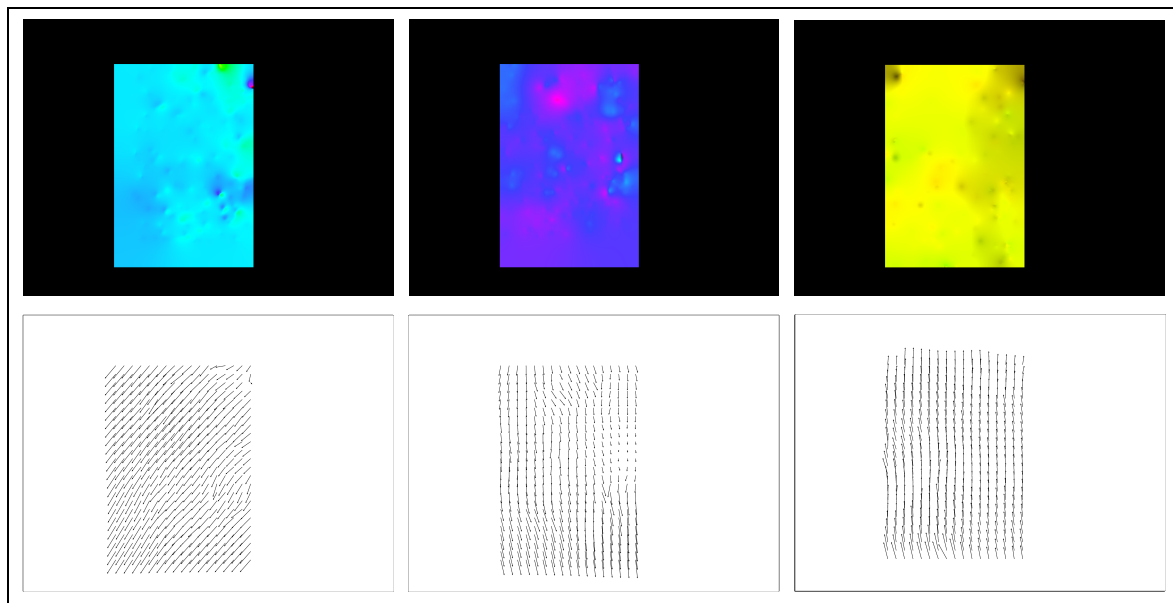
berechnete Geschwindigkeit im Verhältnis zur gemessenen Geschwindigkeit



prozentuale Abweichungen der Teilsequenzen

Im Algorithmus „HSRW H“ wurden die Werte von fünf optischen Flüssen-Feldern nicht berücksichtigt, da ihre Geschwindigkeiten deutlich von den restlichen Bewegungsraten abwichen. Der Ausschluss von fehlerhaften Feldern kann das Ergebnis verbessern.

Optischer Fluss „HSRW H“	19	24	32	34	35
mm/Min	21,06	15,56	43,38	10,08	10,38



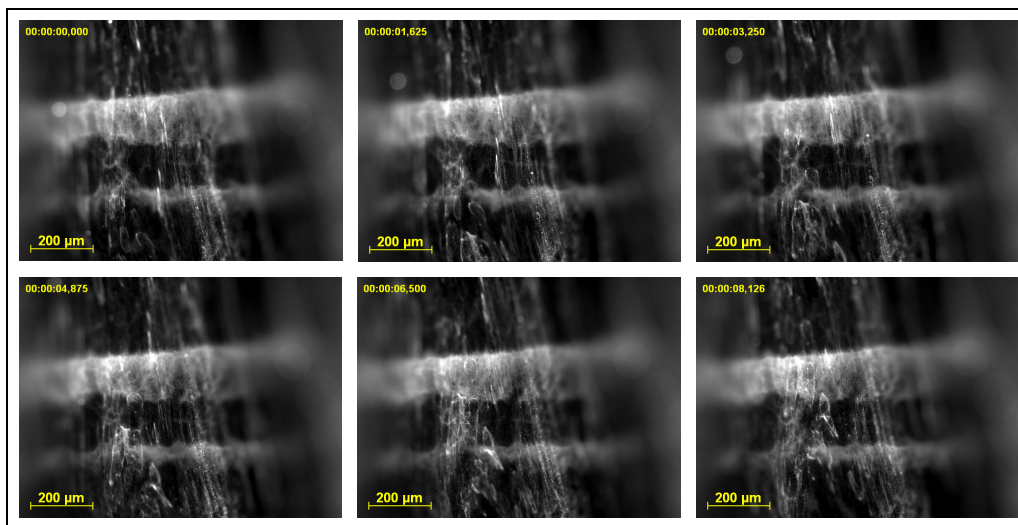
optischer Fluss, links: 19 HSRW H, mitte: 24 HSRW H, rechts: 20 HSRW G

Die Tabelle zeigt die Abweichungen des Algorithmus „HSRW H“ mit den fehlerhaften optischen Flüssen.

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	HSRW H	Von Hand		HSRW H	Von Hand
1-41	4,90	2,60	88,46		
1- 6	2,42	2,53	- 4,35	- 50,61	- 2,69
6-11	2,63	2,63	0,00	- 46,33	1,15
11-16	2,76	2,65	4,15	- 43,67	1,92
16-21	6,30	2,34	169,23	28,57	- 10,00
21-26	5,29	2,64	100,38	7,96	1,54
26-31	2,75	2,62	4,96	- 43,88	0,77
31-36	13,96	2,63	430,80	184,90	1,15
36-41	3,06	2,73	12,09	- 37,55	5,00

In dieser Testsequenz mit Partikeln der Größe 1 Mikrometer, sind nur geringe Unterschiede in der Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Algorithmen mit Helligkeits- und Gradientenkonstanz festzustellen. Trotzdem können wir sagen, dass die Methode „PIVRW G“ mit einer Abweichung unter -1% das genaueste Ergebnis liefert und sich die Werte in den Teilabschnitten nur im Bereich von -6% bis +5% bewegen. Danach folgt „PIV2RW G“ mit Werten zwischen -4% und +7%, die Gesamtabweichung liegt knapp über +1%.

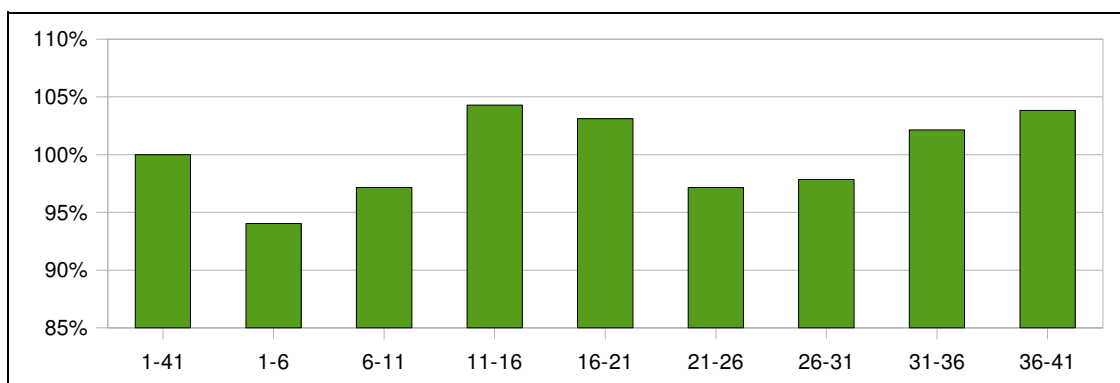
c) Partikel der Größe 100 Nanometer



Bilder 1, 9, 17, 25, 33 und 41 der Testsequenz „Partikel 100 Nanometer“

Diese Testsequenz besteht aus 41 Aufnahmen von fluoreszierenden Partikeln der Größe 100 Nanometer. Anders als bei den vorherigen Bildern, bei denen ein guter Kontrast zwischen Partikeln und dem Hintergrund bestand, haben wir in dieser Sequenz Stellen, an denen dies nicht der Fall ist. Die Bereiche mit wenig Unterschied zwischen den Grauwerten der sich bewegenden Partikeln und dem feststehenden Hintergrund sollen nicht in die optische Fluss-Berechnung mit einbezogen werden. Die berechnete Geschwindigkeit fällt in diesem Bereich niedriger aus als die tatsächliche. Das Auswahlfeld, das den Anforderungen entspricht, ist (187, 395) x (355, 488). Dies ist deutlich kleiner als die bisherigen Auswahlfelder der anderen Testfälle. Die gemessenen Bewegungsraten für die Sequenz haben folgende Werte.

Bilder	1-41	1-6	6-11	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36	36-41
mm/Min	4,19	3,94	4,07	4,37	4,32	4,07	4,10	4,28	4,35



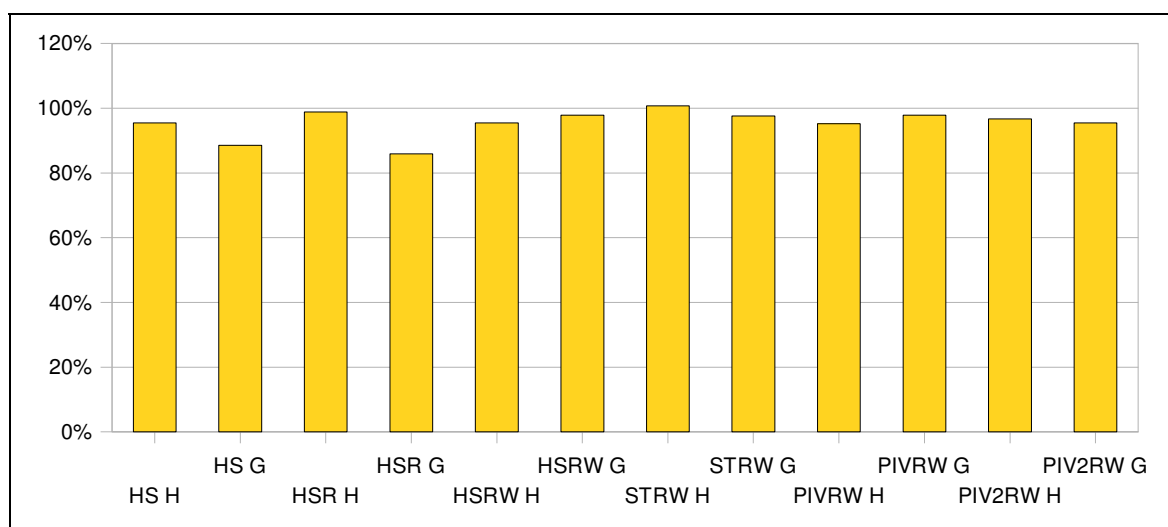
Verhältnis der Teilgeschwindigkeiten zur Gesamtgeschwindigkeit



Algorithmen	Parameter				mm/Min
	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$	$\sigma$	
HS mit Helligkeitskonstanz (HS H)	30			8.1	4,00
HS mit Gradientenkonstanz (HS G)	30			5.4	3,71
HSR mit Helligkeitskonstanz (HSR H)	30			8.1	4,14
HSR mit Gradientenkonstanz (HSR G)	30			4.7	3,60
HSRW mit Helligkeitskonstanz (HSRW H)	30			5.1	4,00
HSRW mit Gradientenkonstanz (HSRW G)	30			0.4	4,10
STRW mit Helligkeitskonstanz (STRW H)	30	60		0.5	4,22
STRW mit Gradientenkonstanz (STRW G)	30	60		0.4	4,09
PIVRW mit Helligkeitskonstanz (PIVRW H)	30	20		0.5	3,99
PIVRW mit Gradientenkonstanz (PIVRW G)	30	20		0.4	4,10
PIV2RW mit Helligkeitskonstanz (PIV2RW H)	30	20	100	0.5	4,05
PIV2RW mit Gradientenkonstanz (PIV2RW G)	30	20	100	1.7	4,00

Tabelle mit Parameterwerten und berechneter Geschwindigkeit

Die, mit den angegebenen Parameterwerten, berechneten Geschwindigkeiten liegen in einem Bereich von 85% bis 100% der gemessenen Gesamtbewegungsrate. Hierbei sind schon die Werte von optischen Flüssen ausgeschlossen worden, deren Fluss-Vektoren stark von der erwarteten Flussrichtung abgewichen sind. Im Folgenden werden die Geschwindigkeiten sowie die Abweichungen der einzelnen Algorithmen angegebenen. Die zwei schlechtesten Algorithmen, „HS G“ und „HSR G“, werden nicht berücksichtigt.



berechnete Geschwindigkeit im Verhältnis zur gemessenen Geschwindigkeit

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	HS H	Von Hand		HS H	Von Hand
1-41	4,00	4,19	- 4,53		
1- 6	3,71	3,94	- 5,84	- 7,25	- 5,97
6-11	3,74	4,07	- 8,11	- 6,50	- 2,86
11-16	4,16	4,37	- 4,81	4,00	4,30
16-21	4,13	4,32	- 4,40	3,25	3,10
21-26	4,05	4,07	- 0,49	1,25	- 2,86
26-31	4,30	4,10	4,88	7,50	- 2,15
31-36	3,91	4,28	- 8,64	- 2,25	2,15
36-41	3,98	4,35	- 8,51	- 0,50	3,82

Horn-Schunck – Helligkeitskonstanz

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	HSR H	Von Hand		HSR H	Von Hand
1-41	4,14	4,19	- 1,19		
1- 6	3,82	3,94	- 3,05	- 7,73	- 5,97
6-11	3,87	4,07	- 4,91	- 6,52	- 2,86
11-16	4,44	4,37	1,60	7,25	4,30
16-21	4,32	4,32	0,00	4,35	3,10
21-26	4,18	4,07	2,70	0,97	- 2,86
26-31	4,32	4,10	5,37	4,35	- 2,15
31-36	4,01	4,28	- 6,31	- 3,14	2,15
36-41	4,14	4,35	- 4,83	0,00	3,82

Horn-Schunck robust – Helligkeitskonstanz

Die „Horn-Schunck“-Methode mit linearer Bestrafungsfunktion erreicht, im Vergleich zum Algorithmus „HS H“ mit einer Abweichung von fast 5%, eine Genauigkeit von 99% der Durchschnittsgeschwindigkeit. Die Teilergebnisse variieren zwischen -8% und +5% bei „Horn-Schunck“. Die robuste Variante hat hierbei nur Abweichungen von -6% bis +5%.

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	HSRW H	Von Hand		HSRW H	Von Hand
1-41	4,00	4,19	- 4,53		
1- 6	3,54	3,94	- 10,15	- 11,50	- 5,97
6-11	4,17	4,07	2,46	4,25	- 2,86
11-16	3,90	4,37	- 10,76	- 2,50	4,30
16-21	4,04	4,32	- 6,48	1,00	3,10
21-26	4,13	4,07	1,47	3,25	- 2,86
26-31	4,29	4,10	4,63	7,25	- 2,15
31-36	4,03	4,28	- 5,84	0,75	2,15
36-41	3,93	4,35	- 9,66	- 1,75	3,82

Horn-Schunck robust mit Warping – Helligkeitskonstanz

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	HSRW G	Von Hand		HSRW G	Von Hand
1-41	4,10	4,19	- 2,15		
1- 6	3,84	3,94	- 2,54	- 6,34	- 5,97
6-11	4,15	4,07	1,97	1,22	- 2,86
11-16	4,04	4,37	- 7,55	- 1,46	4,30
16-21	4,25	4,32	- 1,62	3,66	3,10
21-26	4,09	4,07	0,49	- 0,24	- 2,86
26-31	4,21	4,10	2,68	2,68	- 2,15
31-36	4,14	4,28	- 3,27	0,98	2,15
36-41	4,08	4,35	- 6,21	- 0,49	3,82

Horn-Schunck robust mit Warping – Gradientenkonstanz

Die Methode „HSRW H“ berechnet die gleiche Gesamtgeschwindigkeit wie „HS H“, hat aber größere Abweichungen in den Teilsequenzen. Der Bereich liegt zwischen -10% und +5%. Der Algorithmus „HSRW“ mit Gradientenkonstanz erreicht eine Genauigkeit von 92% bis 103% in den Teilabschnitten. Bei der Bewegungsrate über die gesamte Bilderfolge haben wir eine Abweichung von -2%.

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	STRW H	Von Hand		STRW H	Von Hand
1-41	4,22	4,19	0,72		
1- 6	3,57	3,94	- 9,39	-15,40	- 5,97
6-11	4,33	4,07	6,39	2,61	- 2,86
11-16	4,29	4,37	- 1,83	1,66	4,30
16-21	4,60	4,32	6,48	9,00	3,10
21-26	4,52	4,07	11,06	7,11	- 2,86
26-31	4,28	4,10	4,39	1,42	- 2,15
31-36	4,15	4,28	- 3,04	- 1,66	2,15
36-41	3,99	4,35	- 8,28	- 5,45	3,82

Spatio-Temporal robust mit Warping – Helligkeitskonstanz

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	STRW G	Von Hand		STRW G	Von Hand
1-41	4,09	4,19	- 2,39		
1- 6	3,80	3,94	- 3,55	- 7,09	- 5,97
6-11	4,09	4,07	0,49	0,00	- 2,86
11-16	4,07	4,37	- 6,86	- 0,49	4,30
16-21	4,19	4,32	- 3,01	2,44	3,10
21-26	4,08	4,07	0,25	- 0,24	- 2,86
26-31	4,23	4,10	3,17	3,42	- 2,15
31-36	4,17	4,28	- 2,57	1,96	2,15
36-41	4,10	4,35	- 5,75	0,24	3,82

Spatio-Temporal robust mit Warping – Gradientenkonstanz

Die „STRW H“-Methode hat das genaueste Ergebnis mit einer Abweichung unter 1% bei der Gesamtsequenz. Bei den Teilsequenzen haben wir Differenzen von -9% bis 11%. Dies ist der größte Abweichungsbereich im Testfall. Mit der Gradientenkonstanz erhalten wir den kleinsten Bereich von -7% bis +1%. Die Gesamtgeschwindigkeit erreicht einen Wert von 98%.

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	PIVRW H	Von Hand		PIVRW H	Von Hand
1-41	3,99	4,19	- 4,77		
1- 6	3,60	3,94	- 8,63	- 9,77	- 5,97
6-11	4,06	4,07	- 0,25	1,75	- 2,86
11-16	4,05	4,37	- 7,32	1,50	4,30
16-21	4,15	4,32	- 3,94	4,01	3,10
21-26	4,00	4,07	- 1,72	0,25	- 2,86
26-31	4,16	4,10	1,46	4,26	- 2,15
31-36	4,02	4,28	- 6,07	0,75	2,15
36-41	3,86	4,35	- 11,26	- 3,26	3,82

Particle Image Velocimetry robust mit Warping – Helligkeitskonstanz

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	PIVRW G	Von Hand		PIVRW G	Von Hand
1-41	4,10	4,19	- 2,15		
1- 6	3,75	3,94	- 4,82	- 8,54	- 5,97
6-11	4,13	4,07	1,47	0,73	- 2,86
11-16	4,11	4,37	- 5,95	0,24	4,30
16-21	4,24	4,32	- 1,85	3,41	3,10
21-26	4,11	4,07	0,98	0,24	- 2,86
26-31	4,23	4,10	3,17	3,17	- 2,15
31-36	4,13	4,28	- 3,50	0,73	2,15
36-41	4,09	4,35	- 5,98	- 0,24	3,82

Particle Image Velocimetry robust mit Warping – Gradientenkonstanz

Bei der „Particle Image Velocimetry“-Methode, haben wir im Fall der Helligkeitskonstanz eine Genauigkeit von 95% in der Gesamtbewegungsrate und einen Abweichungsbereich von -11% bis +2%. Bei der Gradientenkonstanz wird ein Wert von 98% erreicht und die Werte der Teilsequenzen variieren zwischen -6% und +3%.

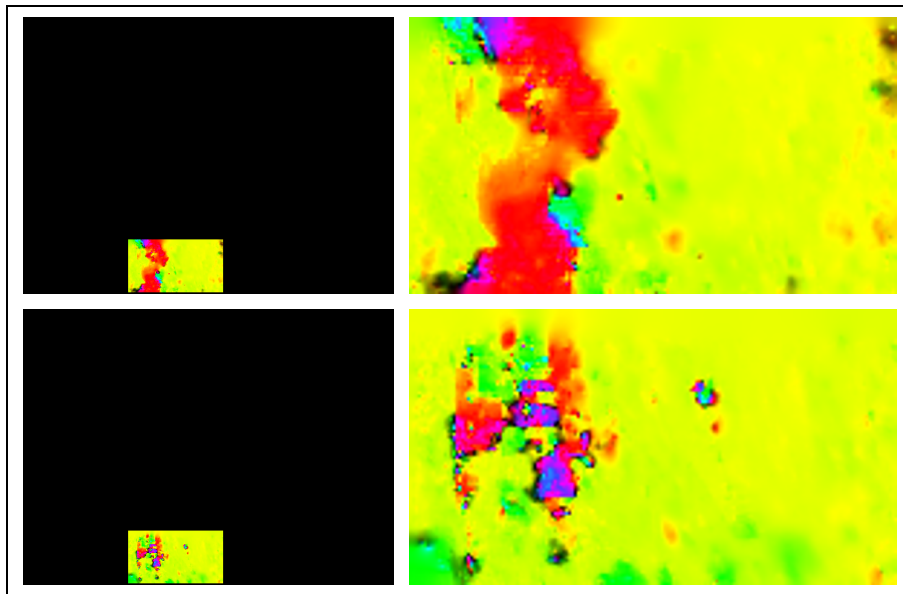
Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	PIV2RW H	Von Hand		PIV2RW H	Von Hand
1-41	4,05	4,19	- 3,34		
1- 6	3,69	3,94	- 6,35	- 8,89	- 5,97
6-11	4,09	4,07	0,49	0,99	- 2,86
11-16	4,06	4,37	- 7,09	0,25	4,30
16-21	4,25	4,32	- 1,62	4,94	3,10
21-26	4,18	4,07	2,70	3,21	- 2,86
26-31	4,19	4,10	2,20	3,46	- 2,15
31-36	4,05	4,28	- 5,37	0,00	2,15
36-41	3,92	4,35	- 9,89	- 3,21	3,82

Particle Image Velocimetry 2 robust mit Warping – Helligkeitskonstanz

Bilder	mm/Min		Abweichung in %	Abw. von Gesamtzeit in %	
	PIV2RW G	Von Hand		PIV2RW G	Von Hand
1-41	4,00	4,19	- 4,53		
1- 6	3,72	3,94	- 5,58	- 7,00	- 5,97
6-11	3,84	4,07	- 5,65	- 4,00	- 2,86
11-16	3,80	4,37	- 13,04	- 5,00	4,30
16-21	4,08	4,32	- 5,56	2,00	3,10
21-26	4,22	4,07	3,69	5,50	- 2,86
26-31	4,23	4,10	3,17	5,75	- 2,15
31-36	4,07	4,28	- 4,91	1,75	2,15
36-41	4,04	4,35	- 7,13	1,00	3,82

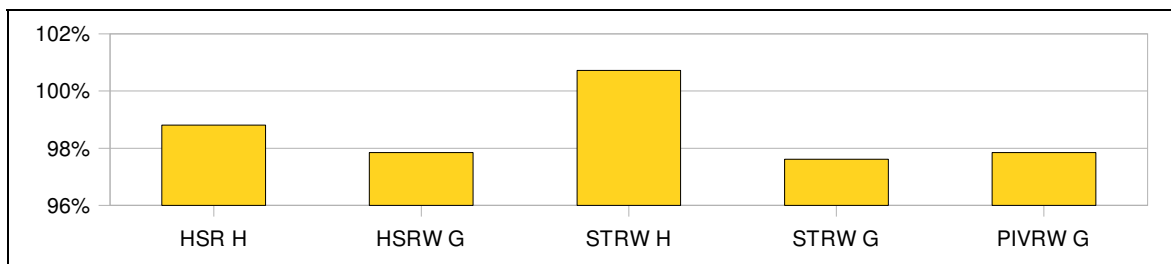
Particle Image Velocimetry 2 robust mit Warping – Gradientenkonstanz

Bei den letzten zwei Algorithmen sind die Abweichungen in der Geschwindigkeit -3% bei der Helligkeitskonstanz und -5% bei der Gradientenkonstanz. Die Werte in den Teilsequenzen bewegen sich zwischen -10% und +3% bzw. -13% und +4%.

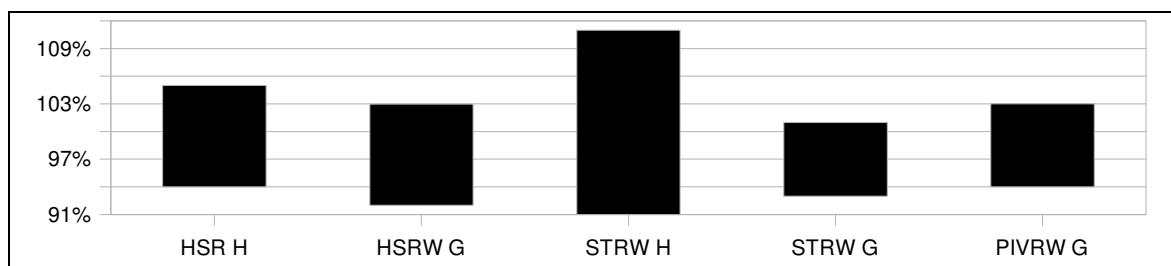


fehlerhafte bzw. falsche optische Fluss-Felder 4 und 12 von „STRW H“

Fünf der zwölf optischen Fluss-Algorithmen berechnen Geschwindigkeiten zwischen 97% und 101% der tatsächlichen Bewegungsrate. Bis auf „STRW H“ besitzen diese Methoden auch die kleinsten Abweichungsbereiche.



berechnete Geschwindigkeit im Verhältnis zur gemessenen Geschwindigkeit

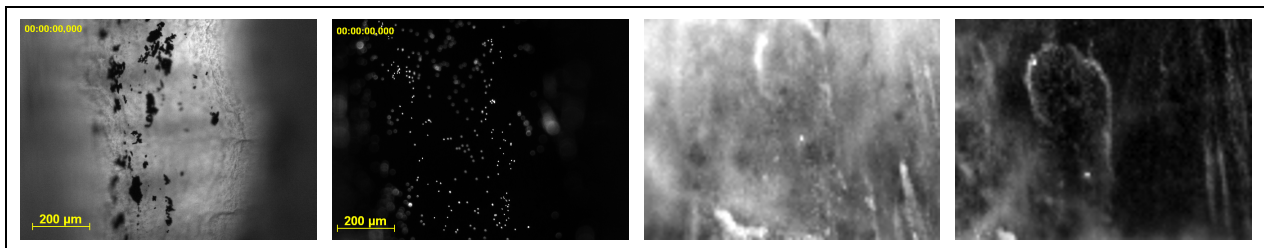


prozentuale Abweichungen der Teilsequenzen

Damit haben wir die Testfälle abgeschlossen, im nächsten Abschnitt wollen wir die Ergebnisse kurz zusammenfassen und die besten Algorithmen für jede Partikelgröße auswählen.

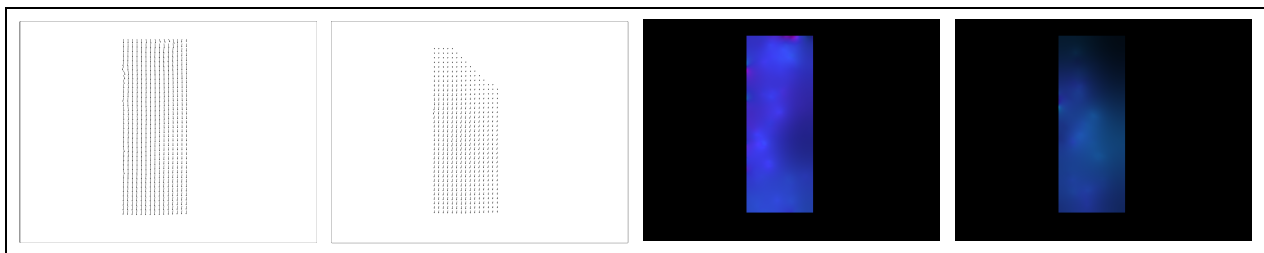
## d) Ergebnisse

In den Testfällen haben wir gesehen, dass die optischen Fluss-Methoden die Partikelgeschwindigkeiten sehr präzise berechnen können. Um gute Resultate zu erzielen, müssen die Aufnahmen aber bestimmte Voraussetzungen erfüllen. Eine gute Unterscheidung zwischen den Partikeln und dem Hintergrund ist eine Anforderung. Dies ist bei den Kohle- sowie den 1-Mikrometerpartikeln gewährleistet. Bei den Aufnahmen der dritten Testsequenz erscheint das Lungengewebe in gleicher Helligkeit wie die fluoreszierenden Partikel (2. Bild v.r.). Für die optische Fluss-Berechnung muss eine passende Stelle gefunden werden, an der man das Gewebe nicht erkennt (1. Bild v.r.).



Kohle-, 1-µm- und Ausschnitte der 100-nm Partikel vor hellem und dunklem Hintergrund

Weiter ist eine gewisse Anzahl an Partikeln erforderlich, je höher, desto genauer ist der errechnete Wert der Geschwindigkeit an der tatsächlichen Geschwindigkeit. Bei wenigen Partikeln wird der Wert stark unterschätzt, wie zum Beispiel in der letzten Teilsequenz der Kohlepartikel. Die Länge der Fluss-Vektoren ist in der rechten oberen Ecke deutlich kleiner als im Rest des Auswahlfeldes.



optische Flüsse 1 und 90 der Kohlesequenz

Der nächste wichtige Punkt ist die Länge der Testsequenz. Die optischen Fluss-Methoden erreichen eine unterschiedliche Genauigkeit in Abhängigkeit zur Bilderanzahl. Wir haben in den Testfällen gesehen, dass Algorithmen, die in langen Sequenzen die Geschwindigkeit mit einer Abweichung unter einem Prozent exakt berechneten, bei kurzen Sequenzen, Probleme mit ihrer Genauigkeit haben. Ein Grund dafür ist, dass sich stark negativ und positiv abweichende Werte von der exakten Bewegungsrate, in größeren Sequenzen gegenseitig aufheben. In kleineren Bilderfolgen ist dies nicht der Fall und ein anderer Algorithmus sollte verwendet werden. Kommen wir nun zur Bewertung der optischen Fluss-Methoden.



Bei den Kohlepartikeln haben wir fünf Algorithmen in der engeren Auswahl. Obwohl der Algorithmus „Spatio-Temporal robust mit Warping G“ die Geschwindigkeit in der Gesamtsequenz um 5% unterschätzt hat, liefert er jedoch die stabileren Werte in einem Bereich von 95% bis 98%. Für Bilderfolgen, die die gleichen Eigenschaften haben wie die Kohletestsequenz, sollte die Methode „STRW G“ verwendet werden.

Lange Sequenz (91 Bilder)		Bereich in kurzen Sequenzen (9 • 11 Bilder)		
HSR G	101,22%	STRW G	95%	98%
HS G	97,97%	HSRW G	92%	96%
STRW G	95,53%	PIVRW G	92%	96%

genaueste Algorithmen in der Kohlesequenz

Für Bilderfolgen, die dem Testfall der 1 Mikrometer-Partikel gleichen, empfiehlt sich die Methode „Particle Image Velocimetry robust mit Warping und Gradientenkonstanz“. Sie berechnet in langen und kurzen Sequenzen Geschwindigkeiten, die nur gering von den tatsächlichen Werten abweichen.

Lange Sequenz (91 Bilder)		Bereich in kurzen Sequenzen (4 • 11 Bilder)		
PIVRW G	99,62%	PIVRW G	94%	105%
PIV2RW G	101,15%	PIV2RW G	96%	107%
HSRW G	101,92%	PIVRW H	96%	111%

genaueste Algorithmen in der Sequenz „1 µm-Partikel“

Der Algorithmus „PIVRW G“ liefert auch in der dritten Testsequenz gute Werte und sollte zur Berechnung des optischen Flusses bei 100 Nanometer-Partikeln verwendet werden. Die Methode „STRW H“ hat zwar das beste Ergebnis in der Gesamtsequenz, aber mit Geschwindigkeitswerten, die zwischen 91% und 111% liegen, haben wir einen Algorithmus der nicht immer gute Werte garantiert.

Lange Sequenz (91 Bilder)		Bereich in kurzen Sequenzen (4 • 11 Bilder)		
STRW H	100,72%	STRW G	93%	101%
HSR H	98,81%	PIVRW G	94%	103%
PIVRW G	97,85%	HSR H	94%	105%

genaueste Algorithmen in der Sequenz „100 nm-Partikel“

## **5. Zusammenfassung**

In dieser Arbeit haben wir versucht, die exakte Geschwindigkeit von Partikeln mit Hilfe von optischen Fluss-Verfahren zu berechnen. Grundlage der Methoden sind verschiedene Konstanzannahmen im Datenterm und Glattheitsannahmen im Glattheitsterm des Energiefunctionals. Der optische Fluss, bestehend aus den beiden minimierenden Funktionen des Functionals, wurde durch Lösen der Euler-Lagrange-Gleichungen berechnet. Die zwölf Algorithmen erzielen unterschiedliche Genauigkeit in den einzelnen Testfällen. Die Abweichung von der tatsächlichen Geschwindigkeit kann durch verschiedene Aufnahmebedingungen verringert werden. Eine hohe Anzahl an Partikeln und eine gute Unterscheidung dieser vom Hintergrund ermöglicht die Berechnung eines genaueren optischen Fluss-Feldes im Gegensatz zu wenigen Partikeln und geringem Kontrast zum Hintergrund. Das beste Ergebnis liefert in der Kohlepartikel-Sequenz die Methode „Spatio-Temporal robust mit Warping und Gradientenkonstanz“. Für die zweite und dritte Sequenz mit Partikeln der Größe 1 Mikrometer und 100 Nanometer eignet sich der „Particle Image Velocimetry robust mit Warping und Gradientenkonstanz“-Algorithmus.

**6. Quellenverzeichnis**

- [BA] „Robust dynamic motion estimation over time“,  
In Proc. 1991 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision  
and Pattern Recognition, pages 292– 302, Maui, HI,  
M. J. Black and P. Anandan, 1991
- [BBPW] „High accuracy optic flow estimation based on a theory for warping“,  
In T. Pajdla and J. Matas, editors, Computer Vision – ECCV 2004,  
volume 3024 of Lecture Notes in Computer Science, pages 25–36.  
Springer, Berlin,  
T. Brox, A. Bruhn, N. Papenberg, and J. Weickert, 2004
- [Bruhn] „Variationelle Optische Flussberechnung -  
Präzise Modellierung und effiziente Numerik“,  
Lehrstuhl „Mathematical Image Analysis“,  
Universität des Saarlandes  
A. Bruhn, Dissertation 2006
- [Cpcv] Skript zur Vorlesung  
„Correspondence Problems in Computer Vision“,  
Lehrstuhl „Mathematical Image Analysis“,  
Universität des Saarlandes  
A. Bruhn, Sommersemester 2007
- [Deipcv] Skript zur Vorlesung  
„Differential Equations in Processing and Computer Vision“,  
Lehrstuhl „Mathematical Image Analysis“,  
Universität des Saarlandes  
J. Weickert, Sommersemester 2006
- [Els] „Calculus of Variations“,  
Pergamon, Oxford,  
L. E. Elsgolc, 1961
- [GP] “Stochastic models for div-curl optical flow methods“,  
In Signal Processing Letters, Vol. 3, No. 2, pp. 32—44, 1996,  
S. Gupta, J. Prince, 1996
- [Hsof] „Determining optical flow“,  
Artificial Intelligence, 17:185–203,  
B. Horn and B. Schunck, 1981

- [Hub] „Robust Statistics“,  
Wiley, New York,  
P.J. Huber , 1981
- [Ipcv] Skript zur Vorlesung  
„Image Processing and Computer Vision“,  
Lehrstuhl „Mathematical Image Analysis“,  
Universität des Saarlandes  
J. Weickert, Wintersemester 2004/05
- [Mathe C] Skript zur Vorlesung  
„Mathematik C - Dynamische Optimierung“,  
Lehrstab Mathematik der Wirtschaftswissenschaften,  
Universität des Saarlandes  
K. Schindler, Sommersemester 2007
- [Sch] „Numerische Mathematik“,  
Teubner, Stuttgart, Vierte Auflage,  
H. R. Schwarz, 1997
- [WS] „Variational optic flow computation with a spatio-temporal  
smoothness constraint“,  
Journal of Mathematical Imaging and Vision, 14(3):245–255,  
J. Weickert and C. Schnörr, 2001