Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2009/2010

2. Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

TEIL A: DISKRETE MATHEMATIK

Kapitel 1

Mengen

1.1 Motivation

Der Mengenbegriff ist von grundlegender Bedeutung in vielen Bereichen der Informatik, z.B. bei Datenbanken.

1.2 Definition: Menge

Unter einer Menge M verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterscheidbaren Objekten der Anschauung oder des Denkens, welche die Elemente von M genannt werden, zu einem Ganzen.

1.3 Anmerkungen

a) Dieser Mengenbegriff geht auf Georg Cantor (1845-1918) zurück. Er begründete die moderne Mengenlehre.

b) Der Mengenbegriff ist nicht unumstritten und widerspruchsfrei, genügt jedoch unseren Anwendungen.

   Beispiel: Der Barbier rasiert alle Menschen, die sich selbst nicht rasieren. Wer rasiert den Barbier?

c) Die Elemente einer Menge werden in geschweiften Klammern eingeschlossen.

   Beispiel: $\{4, 1, 5\}$

d) Die Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle. Wir unterscheiden also nicht zwischen $\{4, 1, 5\}$ und $\{1, 4, 5\}$. Ebenso spielen Wiederholungen keine Rolle. Wir identifizieren also $\{1, 4, 5\}$ und $\{1, 1, 4, 5\}$.

e) Symbole für wichtige Mengen:

$\mathbb{N} := \{x \mid x$ ist natürliche Zahl $\} = \{1, 2, 3...\}$

$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, ...\}$: natürliche Zahlen mit $\{0\}$

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$: ganze Zahlen

$\mathbb{Q} := \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$: rationale Zahlen

$\mathbb{R}$: reelle Zahlen

$\emptyset, \{\}$: leere Menge (enthält kein Element)

1.4 Definition: Teilmenge

a) A heißt Teilmenge von B (d.h. $A \subset B$ oder $B \supset A$), wenn jedes Element von A auch Element von B ist: $x \in A \Rightarrow x \in B$.

b) In diesem Fall nennt man B auch Obermenge von A.

c) Zwei Mengen A und B sind gleich ($A = B$), falls $A \subset B$ und $B \subset A$. Andernfalls sind sie ungleich ($A \neq B$).

d) Falls $A \subset B$ und $A \neq B$, schreibt man auch $A \subsetneqq B$ und sagt: A ist echt enthalten in B.

e) Ist A nicht Teilmenge von B, schreibt man $A \not\subset B$.

1.5 Bemerkungen

a) Beziehungen zwischen Mengen kann man durch so genannte Venn-Diagramme (nach John Venn (1834-1923)) veranschaulichen.

b) $\emptyset$ ist Teilmenge von jeder Menge.

Warum? Es existiert kein Element in $\emptyset$, das nicht zu A gehört.

1.6 Definition: Potenzmenge

Ist M eine Menge, so heißt

$$P(M) := \{X \mid X \subset M\}$$

die Potenzmenge von M.

1.7 Beispiele

a) $M = \{1, 2\}, \quad P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

b) $M = \{a, b, c\}, \quad P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

c) $M = \emptyset, \quad P(M) = \{\emptyset\}$

Algemein gilt: Die Potenzmenge einer n-elementigen Menge hat 2^n Elemente.

1.8 Operationen auf Mengen

Durchschnitt (Schnittmenge) zweier Mengen M und N:

$$M \cap N := \{x | x \in M \text{ und } x \in N\}$$

M und N heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$.

Beispiel: $M = \{1, 3, 5\}, \quad N = \{2, 3, 5\}, \quad S = \{5, 7, 8\}$
$M \cap N = \{3, 5\}$, $(M \cap N) \cap S = \{5\}$

Vereinigung zweier Mengen M und N:

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$$

Dabei darf x auch in beiden Mengen sein (”oder” ist kein ”exklusives oder”).

Differenzmenge

$$M \setminus N := M - N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$$

$M \setminus N$ heißt auch Komplement von N in M, Schreibweise: $\overline{N}^M$.

Wenn die Grundmenge klar ist schreibt man meist $\overline{N}$ oder N^C.

1.9 Satz (Rechenregeln für Durchschnitte und Vereinigungen)

Seien M,N und S Mengen. Dann gelten folgende Gesetze:

a) Kommutativgesetze:

i) $M \cup N = N \cup M$
ii) $M \cap N = N \cap M$

b) Asoziativgesetze:

i) $(M \cup N) \cup S = M \cup (N \cup S)$

ii) $(M \cap N) \cap S = M \cap (N \cap S)$

c) Distributivgesetze

i) $M \cap (N \cup S) = (M \cap S) \cup (M \cap S)$

ii) $M \cup (N \cap S) = (M \cup S) \cap (M \cup S)$

Ferner gilt für jede Menge M

i) $M \cup \emptyset = M$

ii) $M \cap \emptyset = \emptyset$

iii) $M \setminus \emptyset = M$

Beweis von (c)(i).
Zu zeigen:

$$\underbrace{M \cap (N \cup S)}_{=:A} = \underbrace{(M \cap N) \cup (M \cap S)}_{=:B}$$

Um $A = B$ zu zeigen, zeigen wir, dass $A \subset B$ und $B \subset A$.

"$A \subset B$" : Sei

$$x \in A \Rightarrow x \in M \text{ und } (x \in N \text{ oder } x \in S)$$

.
Falls $x \in N$: $x \in M \cap N \;\Rightarrow\; x \in (M \cap N) \cup (M \cap S) = B$.
Falls $x \in S$: $x \in S \cap M \;\Rightarrow\; x \in (M \cap S) \cup (M \cap N) = B$.

"$B \subset A$" : Sei

$$x \in B \Rightarrow x \in M \cap N \;\text{ oder }\; x \in M \cap S$$

.
Falls $x \in M \cap N : \Rightarrow x \in M$ und $x \in N$
$\Rightarrow x \in N \cup S$ (wegen $x \in N$)
$\Rightarrow x \in M \cap (N \cup S) = A$ (wegen $x \in M$).
Falls $x \in M \cap S : \Rightarrow x \in M$ und $x \in S$
$\Rightarrow x \in N \cup S$ (wegen $x \in S$)
$\Rightarrow x \in M \cap (N \cup S) = A$ (wegen $x \in M$) ∎

1.10 Satz (Rechenregeln für Komplementbildung)

Bei Mengen M, N innerhalb einer Grundmenge G gilt:

a) $M \setminus N = M \cap \overline{N}$

b) De Morgan'sche Regeln

i) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

ii) $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$

c) Aus $M \subset N$ folgt $\overline{N} \subset \overline{M}$

- zu b) und c): "Komplementbildung kehrt die Operatoren um"

1.11 Unendliche Durchschnitte und Vereinigungen

Definition: Sei M eine Menge von Indizes (z.B. $M = \mathbb{N}$). Für alle $n \in M$ sei eine Menge A_n gegeben. Dann ist

$$\bigcup_{k \in M} A_k \;:=\; \{x \mid x \in A_i \text{ für (mindestens) ein } i \in M\}$$

$$\bigcap_{k \in M} A_k \;:=\; \{x \mid x \in A_i \text{ für alle } i \in M\}$$

Für eine endliche Indexmenge M, z.B. $M = \{1, ..., n\}$, stimmt diese Definition mit der bisherigen Definition 1.8 überein. Man schreibt dann:

$$\bigcup_{k=1}^{n} \;=\; A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} \;=\; A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$$

(Wegen der Assoziativität (1.9b) ist keine Klammerung nötig.)

1.12 Beispiel

$M = \mathbb{N}\, , A_k \;=\; \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{k}\}$

- endlicher Schnitt:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_n$$

- unendlicher Schnitt:

$$\bigcap_{k \in N} A_k = \emptyset$$

(Es gibt keine positive Zahl x , die $0 < x < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt.)

1.13 Definition: Kartesisches Produkt

Sei $M_1, M_2, ..., M_n$ nichtleere Mengen. Dann heißt die Menge der geordneten n-Tupel

$$M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \ := \ \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2,\ \ldots,\ x_n \in M_n\}$$

das kartesische Produkt der Mengen $M_1, M_2, ..., M_n$ (nach René Descartes (latinisiert: Renatus Cartesius), 1596-1650, Philosoph und Begründer der Analytischen Geometrie).

Statt $M_1, M_2, \ldots, M_n$ schreibt man auch

$$X_{k=1}^{n} M_k$$

oder

$$\prod_{k=1}^{n} M_k \, .$$

Ist $M_1 = M_2 = ... = M_n =: M$, dann schreibt man

$$M^n \text{ statt } \prod_{k=1}^{n} M_k \, .$$

1.14 Beispiele

a) $M = \{1, 2\}$, $N = \{a, b, c\}$
$M \times N = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
$N \times M = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
Im allgemeinen gilt also $M \times N \neq N \times M$.

b) $M_1 = M_2 = M_3 = \mathbb{R}$
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

Kapitel 2

AUSSAGENLOGIK

Mein teurer Freund, ich rat Euch drum,
Zuerst Collegium Logicum.
(Goethe, Faust I)

2.1 Bedeutung in der Informatik

- Schaltkreisentwurf
- automatisiertes Beweisen, Verifikation
- Anfrage an Suchmaschinen im Internet

2.2 Definition Aussage

Eine Aussage ist ein Satz einer menschlichen oder künstlichen Sprache, dem eindeutig einer der Wahrheitswerte

wahr (1)

oder

falsch (0)

zugeordnet werden kann.

2.3 Beispiele

a) ”Saarbrücken liegt am Rhein” (falsch)

b) ”$3 < 5$” (wahr)

2.4 Verknüpfung von Aussagen

Wir definieren die Verknüpfungen:

- $\neg A$: "nicht A" (Negation)
- $A \wedge B$: "A und B" (Konjunktion)
- $A \vee B$: "A oder B" (Disjunktion)
- $A \Rightarrow B$: "A impliziert B" (Implikation)
- $A \Leftrightarrow B$: "A ist äquivalent zu B" (Äquivalenz)

mittels der Wahrheitswertetafel

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

2.5 Anmerkungen

a) $A \vee B$ ist auch wahr, wenn A und B wahr sind. (Kein “entweder … oder”.)

b) Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist immer wahr, wenn die Prämisse (Aussage A) falsch ist. Aus falschen Aussagen können auch wahre Aussagen folgen.

   Beispiel: "$-1 = 1$" ist falsch. Quadrieren liefert "$1 = 1$" (wahr).

c) $A \Rightarrow B$ ist nicht dasselbe wie $B \Rightarrow A$.

   Beispiel:
   A: "Schnuffi ist ein Dackel", B: "Schnuffi ist ein Hund"
   $A \Rightarrow B$ ist wahr, aber B impliziert nicht notwendigerweise A.

2.6 Definition Tautologie

Ein logischer Ausdruck ist eine Tautologie [1], falls sich für alle Kombinationen der Argumente eine wahre Aussage ergibt.

[1] Tautologie: frei aus dem Altgriechischen übersetzt “dasselbe Wort”

2.7 Beispiel

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

ist eine Tautologie, denn es gilt:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

2.8 Satz (Wichtige Tautologien)

a) $A \vee \neg A$ Satz vom ausgeschlossenen Dritten

b) $\neg(A \wedge \neg A)$ Satz vom Widerspruch

c) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ doppelte Verneinung

d) $\left.\begin{array}{l}(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)\\ (A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)\end{array}\right\}$ Kommutativgesetze

e) $\left.\begin{array}{l}A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)\\ A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)\end{array}\right\}$ Distributivgesetze

f) $\left.\begin{array}{l}\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)\\ \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)\end{array}\right\}$ de Morgan'sche Gesetze

g) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ Kontraposition

h) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

i) $\left.\begin{array}{l}(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)\\ (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)\end{array}\right\}$ Assoziativgesetze

j) $\left.\begin{array}{l}(A \vee A) \Leftrightarrow A\\ (A \wedge A) \Leftrightarrow A\end{array}\right\}$ Idempotenz

Häufige Konvention der Prioritäten: 1)$\neg$, 2)$\wedge$, 3)$\vee$, 4)$\Rightarrow$, 5)$\Leftrightarrow$.

Gleichrangige Verknüpfungen werden von links nachs rechts ausgewertet. Klammerung erlaubt eine andere Reihenfolge und ist im Zweifelsfall stets empfehlenswert.

2.9 Bemerkung

Man kann zeigen, dass sich Resultate der Mengenlehre, (zB. 1.9 , 1.10) und der Aussagenlogik (zB. 2.8) in einander überführen lassen, wenn man folgende Übersetzung vornimmt (M ist Grundmenge):

Mengenlehre	$\emptyset$	M	$\cap$	$\cup$	^{C}	$=$
Aussagelogik	0	1	$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\Leftrightarrow$

Das liegt daran, dass in beiden Fällen die gleiche algebraische Grundstruktur zugrunde liegt (Bool'sche Algebra, Thema in MfI 2).

2.10 Beispiel einer Tautologie

Mit Satz 2.8 zeigen wir:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

Beweis:

$$(((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$$\Longleftrightarrow^{h)}$$

$$(\neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \vee (A \Rightarrow C))$$

$$\Longleftrightarrow^{f)}$$

$$(\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow C) \vee (A \Rightarrow C))$$

$$\Longleftrightarrow^{h)}$$

$$(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee C) \vee (\neg A \vee C))$$

$$\Longleftrightarrow^{f),c)}$$

$$((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg A \vee C))$$

$$\Longleftrightarrow^{d)}$$

$$((A \wedge \neg B) \vee \neg A \vee (B \wedge \neg C) \vee C)$$

$$\Longleftrightarrow^{e)}$$

$$(\underbrace{(A \vee \neg A)}_{1} \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee (B \vee C) \wedge \underbrace{(\neg C \vee C)}_{1})$$

$$\Longleftrightarrow^{a)}$$

$$(1 \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee (B \vee C) \wedge 1)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$((\neg B \vee \neg A) \vee (B \vee C))$$

$$\overset{i),d)}{\Longleftrightarrow}$$

$$((\underbrace{\neg B \vee B)}_{1} \vee \neg A \vee C)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$1 \vee \neg A \vee C$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$1$$

□

2.11 Quantoren

dienen zur kompakten Schreibweise logischer Ausdrücke.

$\forall$: für alle

$\exists$: es existiert ein

$\exists!$: es existiert genau ein

$\nexists$: es existiert kein

Beispiel: $\forall x : A(x)$ “für alle x gilt Aussage $A(x)$”

2.12 Negation von Aussagen

Negation vertauscht $\forall$ und $\exists$, und sie negiert die Aussage:

$\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : (\neg A(x))$

$\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : (\neg A(x))$

Beispiel: ”Alle Radfahrer habe krumme Beine.”
Negation: ”Es gibt einen Radfahrer, der keine krummen Beine hat.”

Bei komplizierteren Aussagen geht man sukzessive vor:
Beispiel:

$$\begin{aligned} & \neg(\exists y \, \forall x : A(x,y)) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall y \, \neg(\forall x : A(x,y)) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall y \, \exists x : (\neg A(x,y)) \end{aligned}$$

Kapitel 3

BEWEISPRINZIPIEN

3.1 Bedeutung in der Informatik

Informatiker beweisen ständig, sie nennen es nur oft nicht so.

> Macht ein Protokoll, was es soll?
>
> Arbeitet mein Algorithmus in allen Fällen korrekt?
>
> Terminiert er in endlicher Zeit?

Einige Tautologien aus Satz 2.8 ermöglichen entsprechende Beweisprinzipien.

3.2 Direkter Beweis

- Man möchte $A \Rightarrow B$ zeigen
- Hierzu zerlegt man $A \Rightarrow B$ in eine Reihe von einfacheren Implikationen
- verwendete Tautologie: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)\big)$

3.3 Beispiel

Satz: Ist eine natürliche Zahl durch 6 teilbar, dann ist sie auch durch 3 teilbar.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar

$$\Rightarrow \ \exists k \in \mathbb{N} \ : \ n = 6 * k$$

$$\Rightarrow \ n = 3 * 2 * k = 3p \text{ mit } p = 2 * k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \ \text{n ist durch 3 teilbar.}$$

$\square$

3.4 Beweis durch Kontraposition (Indirekter Beweis)

- Beruht auf der Tautologie $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- Statt $A \Rightarrow B$ zu zeigen, zeigt man also $\neg B \Rightarrow \neg A$

3.5 Beispiel

Satz: Sei $n \in \mathbb{Z}$ und n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Beweis: Annahme: n ist ungerade $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}:\ n = 2m+1$

$$\Rightarrow n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 = 2\underbrace{(2m^2+2m)}_{\in\mathbb{Z}}+1$$

$$\Rightarrow n^2 \text{ ungerade.}$$

□

3.6 Widerspruchsbeweis

- Wir wollen Aussage A beweisen
- Wir nehmen an, A ist nicht wahr
- folgern Widerspruch
- also ist A wahr.
- Beruht auf Tautologie: $\neg(A \wedge \neg A)$

3.7 Beispiel

Satz: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. $\sqrt{2}$ kann nicht als Bruch $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ dargestellt werden.

Beweis: Annahme: $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ mit gekürztem Bruch $\frac{n}{m}$ (dh. n, m sind teilerfremd).
Aus dem Satz von Pythagoras folgt:

$$2m^2 = n^2 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow\ n^2 \text{ gerade } \Rightarrow^{3.5}\ n \text{ gerade} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}\ :\ n = 2k$$

Einsetzen in (*):

$$2m^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

$$m^2 = 2k^2 \Rightarrow m^2 \text{ gerade } \overset{3.5}{\Rightarrow} m \text{ gerade.}$$

Da also m und n gerade sind, war $\frac{n}{m}$ nicht teilerfremd. Somit ist $\sqrt{2}$ nicht rational.

□

3.8 Beweis von Äquivalenz

- Um $A \Leftrightarrow B$ zu zeigen, zeigt man $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$
- verwendete Tautologie: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$
- Um Äquivalenz von vielen Aussagen zu zeigen, bietet sich ein zyklisches Beweisverfahren an:

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow D$$

  zeigt man durch

$$A \Rightarrow B\,,\, B \Rightarrow C\,,\, C \Rightarrow D\,,\, D \Rightarrow A.$$

3.9 Beweis durch vollständige Induktion

Grundidee:

- Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben.
- Es gelte:
  1) Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.
  2) Induktionsschluss: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ist wahr.
- Dann gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.10 Beispiel

Definition:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + ... + a_n \qquad \text{Summenzeichen}$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m * a_{m+1} * ... * a_n \qquad \text{Produktzeichen}$$

Satz: $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}\,,\, \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis durch vollständige Induktion über n:

1) Induktionsanfang: Für n=1 ist

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 * 2}{2}$$

2) Induktionsschluss: Annahme: $A(n)$ sei wahr für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \qquad \text{, d.h. A(n+1) ist wahr} \end{aligned}$$

□

3.11 Anmerkungen

a) Induktionsbeweise sind häufig bei Summen und Produktformeln

b) Der Induktionsanfang muss nicht bei 1 beginnen. Beginnt er bei $A(k)$, so gilt die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$.

Kapitel 4

RELATIONEN

4.1 Motivation

Wir möchten

- die Elemente zweier Mengen in Beziehung setzen
- eine Menge in Klassen "ähnlicher" Elemente zerlegen
- die Elemente innerhalb einer Menge ordnen

In der Informatik sind solche Fragen z.B. bei relationalen Datenbanken wichtig.

4.2 Definition Relation

Seine A, B nichtleere Mengen. Eine <u>Relation</u> auf $A \times B$ ist eine Teilmenge

$$R \subset A \times B := \{(x,y)|x \in A, y \in B\}.$$

Für $x, y \in R$ sagt man "x steht in Relation R zu y" und schreibt auch:

$$xRy$$

4.3 Beispiele

a) $R_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y^2\}$,
$R_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < y\}$
sind Relationen auf $\mathbb{R}^2$.

b) Sei S die Menge der Studierenden der UdS und F sei die Menge der Studiengänge. Dann ist:

$$B = \{(s,f)\,|\,\text{s belegt den Studiengang f}\}$$

eine Relation auf $S \times F$. In relationalen Datenbanken werden Datensätze durch solche Relationen beschrieben.

4.4 Definition Reflexiv, Symmetrisch, Transitiv (Äquivalenzrelation)

Eine Relation $R \subset A \times A$ heißt:

- reflexiv, falls $xRx \quad \forall x \in A$,
- symmetrisch, falls $xRy \Rightarrow yRx \quad \forall x, y \in A$,
- transitiv, falls aus xRy und yRz stets xRz folgt.

Ist eine Relation R reflexiv, symmetrisch und transitiv, so heißt sie Äquivalenzrelation auf A. Statt xRy schreibt man in diesem Falle auch $x \sim y$.

4.5 Beispiele

a) Sei A die Menge aller Einwohner Deutschlands. Wir definieren die Relation

$$xRy \;\Leftrightarrow\; \text{x und y haben ihren Wohnsitz in der selben Stadt.}$$

Dann ist R eine Äquivalenzrelation.

b) $A := \mathbb{Z}$. Betrachte die Relation

$$R_5 := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y \text{ ist ohne Rest durch 5 teilbar}\}.$$

Dann gilt:

i) Reflexivität:

$$xR_5x \; \forall x \in \mathbb{Z}, \text{ da } x - x = 0 \text{ durch 5 teilbar ist}$$

ii) Symmetrie: Sei xR_5y

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \; x - y = 5k$$
$$\Rightarrow \; y - x = 5 * \underbrace{(-k)}_{\in \mathbb{Z}} \;\Rightarrow\; yR_5x$$

iii) Transitivität: Sei xR_5y und yR_5z

$$\Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z} : \; x - y = 5k \text{ und } y - z = 5l$$

$$\Rightarrow \; x - z = (x - y) + (y - z) = 5k + 5l = 5 \underbrace{(k + l)}_{\in \mathbb{Z}} \text{ d.h. } xR_5z.$$

Somit ist R_5 eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$

c) $A := \mathbb{R}$ und $S := \{(x, y) \mid x < y\}$.
S ist keine Äquivalenzrelation: nicht reflexiv, nicht symmetrisch.

Äquivalenzrelationen erlauben eine Zerlegung in Klassen:

4.6 Definition Äquivalenzklasse

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A und $a \in A$.
Dann heißt

$$[a] := \{x \in A | x \sim a\}$$

die Äquivalenzklasse von a.
Die Elemente von $[a]$ heißen die zu a äquivalenten Elemente.

4.7 Beispiel

Sei R_5 wie in 4.5 b) definiert. Dann ist

$$[a] := \{x \in \mathbb{Z} | x - a \text{ ist durch 5 teilbar}\}$$

Insbesondere gilt:

- $[0] := \{0, 5, 10, 15, ..., -5, -10, -15, ...\}$
- $[1] := \{1, 6, 11, 16, ..., -4, -9, -14, ...\}$
- $[2] := \{2, 7, 12, 17, ..., -3, -8, -15, ...\}$
- $[3] := \{3, 8, 13, 18, ..., -2, -7, -12, ...\}$
- $[4] := \{4, 9, 14, 19, ..., -1, -6, -11, ...\}$

Offenbar gilt:

- $[5] = [0]$
- $[6] = [1]$
- $[7] = [2]$
  $\vdots$

Man nennt $\mathbb{Z}_5 := \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ die Restklassen von $\mathbb{Z}$ modulo 5.

Es gilt: $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup ... \cup [4]$, und $[0]...[4]$ sind disjunkt.

Ist dies Zufall?

4.8 Definition Partition

Eine Partition einer Menge A ist eine Menge $P = \{A_1, A_2, ...\}$ von nichtleeren Teilmengen von A mit:

a) $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

b)
$$\bigcup_i A_i = A$$

Man schreibt auch
$$A = \dot{\bigcup_i} A_i$$
.

4.9 Satz (Partitionseigenschaft von Äquivalenzklassen)

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Dann bildet die Menge der Äquivalenzklassen eine Partition von A.

Beweis:

a) Seien B und C Äquivalenzklassen von A.
Durch Kontraposition zeigen wir: Falls $B \neq C$, so sind B und C disjunkt.

Seien also B und C nicht disjunkt:
$$B \cap C \neq \emptyset.$$
Seien $[b] = B$, $[c] = C$ und $y \in B \cap C$.
Um $B = C$ zu zeigen, beweisen wir $B \subset C$ und $C \subset B$.

"$B \subset C$" :
$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r}\text{Sei } x \in B \Rightarrow x \sim b \\ \text{Da } y \in B \Rightarrow y \sim b \overset{symm}{\Rightarrow} b \sim y\end{array}\right\} \overset{trans}{\Rightarrow} x \sim y \\ \text{Wegen } y \in C \Rightarrow y \sim c \end{array}\right\} \overset{trans}{\Rightarrow} x \sim c, \text{ d.h. } x \in C$$
"$C \subset B$" : Geht auf dieselbe Weise.

b) Für jedes $x \in A$ ist $x \in [x]$ (wegen Reflexivität)
$$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} [x]$$

□

Eine Äquivalenzrelation verhält sich im Prinzip wie "$=$".

Wie lassen sich Relationen charakterisieren, die sich wie "$\leq$" verhalten, d.h. als Ordnungsrelationen wirken?

4.10 Definition Teilordnung

Sei $A \neq \emptyset$. Eine Relation $R \subset A \times A$ heißt Teilordnung auf A, wenn gilt:

a) R ist reflexiv: $xRx \quad \forall x \in A$

b) R ist transitiv: $xRy\ , yRz \;\Rightarrow\; xRz \quad \forall x, y, z \in A$

c) R ist antisymmetrisch: $xRz, yRx \;\Rightarrow\; x = y \quad \forall x, y \in A$.

Ferner heißt R total, wenn xRy oder yRx für alle $x, y \in A$ gilt, d.h. wenn x und y stets vergleichbar sind.

Eine totale Teilordnung nennen wir auch (Total-) Ordnung.

4.11 Beispiele

a) Die Relation "$\leq$" definiert eine Teilordnung auf $\mathbb{R}$:

   i) reflexiv: $x \leq y \; \forall x \in \mathbb{R}$

   ii) transitiv: $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z \; \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

   iii) antisymetrisch: $x \leq y\ , y \leq x \Rightarrow x = y \; \forall x, y \in \mathbb{R}$

   Da $x \leq y$ oder $y \leq x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, ist "$\leq$" sogar eine Totalordnung.

b) Sei M eine Menge: Betrachte Relation "$\subset$" auf Potenzmenge $P(M)$.
   Dann ist das eine Teilordnung auf $P(M)$:

   i) reflexiv: $A \subset A \; \forall A \in P(M)$

   ii) transitiv: $A \subset B$ und $B \subset C \Rightarrow A \subset C \; \forall A, B, C \in P(M)$

   iii) antisymmetrisch: $A \subset B$ und $B \subset A \Rightarrow A = B \; \forall A, B \in P(M)$

   Allerdings ist "$\subset$" keine Totalordnung. Betrachte zB. $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Dann sind die Teilmengen $\{1\}$ und $\{2, 3\}$ nicht vergleichbar.

c) Sei M die Menge der englischen Wörter mit 4 Buchstaben. Verwendet man die alphabetische Ordnung und vereinbart, dass Großbuchstaben vor Kleinbuchstaben kommen, liegt eine Totalordnung vor (lexikographische Ordnung).

Kapitel 5

ABBILDUNGEN

5.1 Motivation

Wir wollen nun spezielle Relationen betrachten, die in der Praxis sehr wichtig sind. Bei ihnen wird jedem Element einer Menge ein eindeutiges Element einer anderen Menge zugeordnet.

5.2 Definition Abbildung

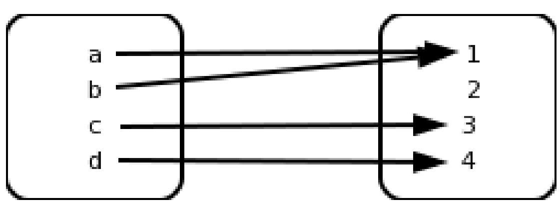
Eine Abbildung (Funktion) zwischen zwei Mengen M und N ist eine Vorschrift $f : M \to N$, die jedem Element $x \in M$ ein eindeutiges Element $f(x) \in N$ zuordnet. Schreibweise:

$$x \mapsto f(x)$$

M ist der Definitionsbereich, N der Wertebereich von f.

5.3 Beispiel

$M = \{a, b, c, d\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$



$a \mapsto f(a) = 1$

5.4 Wichtige Begriffe

Für eine Teilmenge $A \subset M$ heißt $f(A) := \{f(x) \,|\, x \in A\}$ das Bild von A.

Für $B \subset N$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in A \,|\, f(x) \in B\}$ das Urbild von B.
Im Beispiel 5.3:

$$f(\{a,b\}) = \{1\}$$

$$f(\{a,c\}) = \{1,3\}$$

$$f^{-1}(\{3\}) = \{c\}$$

$$f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$$

Hat B nur 1 Element, $B = \{y\}$, dann setzt man $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$.

Ist $f : M \mapsto N$ eine Abbildung und $A \subset M$, dann heißt

$$f|_A : A \to N, \quad A \ni a \mapsto f(a) \in N$$

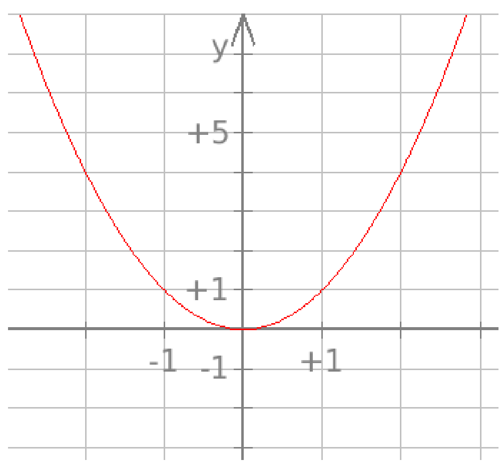
die Einschränkung von f auf A.

Die Relation

$$\Gamma_f := \{(x,y) \in M \times N \,|\, y = f(x)\}$$

heißt Graph von f.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto x^2$



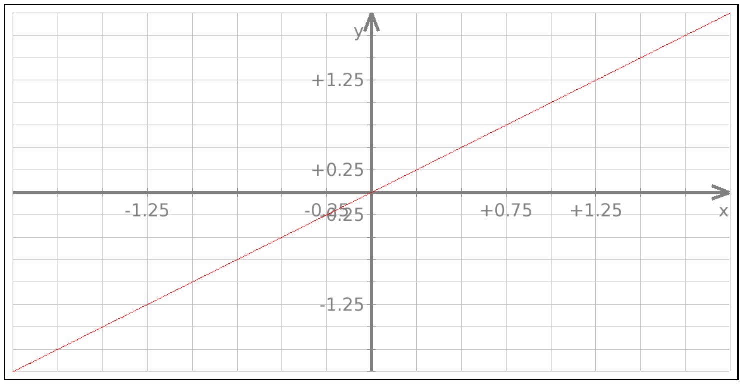
5.5 Reellwertige Funktionen

Funktionen vom Typ $f : D \to \mathbb{R}$ mit einer nichtleeren Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ zählen zu den wichtigsten Abbildungen.

Beispiele:

a) identische Abbildung

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto x$$



b) <u>entier-Funktion</u>

$$\text{entier} : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}, \quad \text{entier}(x) := \text{ größte ganze Zahl} \leq x$$

c)

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \text{ mit } D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

5.6 Definition Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Eine Abbildung

$$f : M \to N$$

heißt:

- <u>surjektiv</u>, wenn es für alle $y \in N$ en $x \in M$ gibt mit $f(x) = y$
  (d.h. $f(M) = N$, "Abbildung auf N")
- <u>injektiv (eineindeutig)</u>, wenn keine 2 verschiedenen Elemente von M auf N abgebildet werden:
  $$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2\,,$$
- <u>bijektiv</u>, wenn f surjektiv und injektiv ist.

5.7 Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\, x \mapsto x^2$ ist

   - nicht surjektiv, da z.B. -1 kein Urbild hat
   - nicht injektiv, da z.B. $f(2) = 4 = f(-2)$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}\,,\, x \mapsto x^2$ ist

   - surjektiv, aber nicht injektiv

c) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$, $x \mapsto x^2$ ist

- nicht surjektiv, aber injektiv

d) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$ ist

- injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Bijektive Abbildungen kann man umkehren:

5.8 Definition Umkehrfunktion

Ist eine Abbildung $f : M \to N$ bijektiv, so heißt die Abbildung

$$f^{-1} : N \to M \,,\, y \mapsto x \quad \text{mit } y = f(x)$$

die Umkehrabbildung von f.

5.9 Beispiel

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \,,\, x \mapsto x^2$$

hat die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \,,\, x \mapsto \sqrt{x}\,.$$

Abbildungen lassen sich miteinander verknüpfen.

5.10 Definition Verknüpfung (Komposition)

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen, dann heißt die Abbildung

$$g \circ f : A \to C \,, \quad x \to g(f(x))$$

die Verknüpfung oder Komposition (oder Hintereinanderschaltung) von f und g.
Sprechweise: "g verknüpft mit f" oder "g Kringel f"

5.11 Satz (Assoziativität der Verknüpfungen)

Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen.
Dann gilt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

d.h. die Verknüpfung ist assoziativ.

Beweis. Ist $x \in A$, so gilt

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)\,.$$

□

5.12 Vorsicht!

Die Verknüpfung von Abbildungen ist i.A. nicht kommutativ.

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x + 1$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^2$$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(x^2) = x^2 + 1,$ aber
$(g \circ f)(x) = g(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1,$
d.h. $f \circ g \neq g \circ f$.

Die Verknüpfung kann auch als Nachweis von Injektivität, Surjektivität und Bijektivität dienen:

5.13 Satz (Kriterium für Injektiviät, Surjektiviät, Bijektivität)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen den nichtleeren Mengen X,Y. Dann gilt:

a) f ist injektiv $\Leftrightarrow\ \exists g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_x$

b) f ist surjektiv $\Leftrightarrow\ \exists g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_y$

c) f ist bijektiv $\Leftrightarrow\ \exists g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_x$ und $f \circ g = \mathrm{id}_y$
In diesem Fall ist g die Umkehrabbildung f^{-1}.

Beweis

a) "$\Rightarrow$" Sei f injektiv.
Dann existiert zu jedem $y \in f(X)$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Setze $g(y) := x$.

Für alle $y \in Y \setminus f(X)$ setzen wir $g(y) := x_0$ mit $x_0 \in X$ beliebig.

Dann ist $g : Y \to x$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_x$.

"$\Leftarrow$" Sei $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_x$.
Sei ferner $f(x_1) = f(x_2)$.
$\Rightarrow \quad x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$, d.h. f ist injektiv.

b) "$\Rightarrow$" Sei f surjektiv.
Zu jedem $y \in Y$ wählen wir ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ und setzen $g(y) := x$.
Dann hat $g : Y \to X$ die Eigenschaft $f \circ g = \mathrm{id}_y$.

"$\Leftarrow$" Sei $g : Y \to X$ mit $f \circ g = id_y$ gegeben. Sei $y \in Y$.
$\Rightarrow \quad y = f(g(y))$, d.h. $y \in f(X)$. Also ist f surjektiv.

c) folgt direkt aus a) und b) sowie der Definition der Umkehrabbildung.

$\square$

5.14 Definition Mächtigkeit von Mengen

Eine nichtleere Menge M heißt endlich, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert und eine Bijektion

$$f : \{1, ..., n\} \to M.$$

n ist eindeutig bestimmt und heißt die Mächtigkeit (Kardinalität, Kardinalzahl [1]) von M.

Schreibweise: $|M| = n$, in manchen Büchern z.T. auch $\#M = n$.

Der leeren Menge ordnet man die Kardinalität 0 zu.

Man kann die Elemente von M aufzählen:
$M := \{m_1, ..., m_n\}$, wobei $f(i) = m_i$ für $i \in \{1, ..., n\}$.

Ist M nicht endlich, so heißt M unendlich.

2 Mengen sind gleichmächtig, wenn eine bijektive Abbildung zwischen ihnen existiert.

Wir nennen eine Menge abzählbar, falls eine bijektive Abbildung $f : M \to \mathbb{N}$ existiert.

Als Symbol für die Mächtigkeit $|\mathbb{N}|$ benutzen wir $\aleph_0$ ("aleph 0")

5.15 Beispiele

- $|\{5, 7, 2, 9\}| = 4$
- $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$, denn mit $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ..., \}$ ergibt sich eine Aufzählung mit der Bijektion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\,,$$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{für } n \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

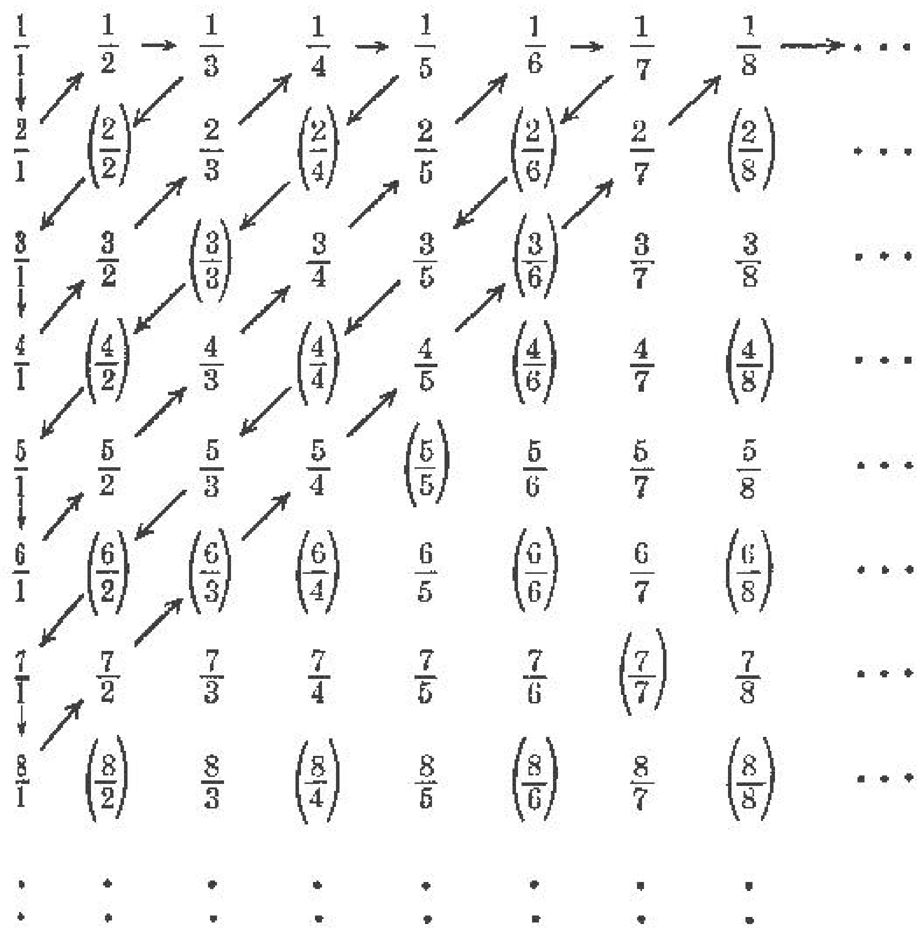
[1] abgeleitet aus dem Lateinischen, "cardo": Türangel bzw. Dreh- und Angelpunkt

5.16 Satz (Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$)

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar, d.h. $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Beweis: (nach Cantor [2], ca. 1877)
Wir beschränken uns zunächst auf $\mathbb{Q}^+ := \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$.

Die Elemente aus $\mathbb{Q}^+$ lassen sich folgendermaßen anordnen:



Durch Weglassen doppelter Elemente entsteht die Anordnung

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 3,\ 4,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,$$

die sich bijektiv auf $\mathbb{N}$ abbilden lässt.

Der Beweis lässt sich auf ganz $\mathbb{Q}$ ausdehnen: Vor die Eins fügt man eine Null an, und hinter jeder Zahl deren Negatives:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \ldots.$$

[2]Georg Cantor (1845-1918), deutscher Mathematiker und Begründer der Mengenlehre

Bemerkung: Nicht alle unendlichen Mengen sind gleichmächtig. Z.B. ist $\mathbb{R}$ überabzählbar (d.h. nicht abzählbar).

5.17 Satz (Äquivalenz von Surjektivität und Injektivität)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen endlichen, gleichmächtigen Mengen X und Y.

Dann sind äquivalent:

a) f ist injektiv,

b) f ist surjektiv,

c) f ist bijektiv.

Beweis: Wegen der Definition der Bijektivität genügt es, $(a) \Leftrightarrow (b)$ zu zeigen.

- "$a) \Rightarrow b)$": Sei $f : X \to Y$ injektiv
  $\Rightarrow \quad |f^{-1}(y)| \leq 1 \; \forall y \in Y$ (einige $y \in Y$ könnten kein Urbild haben)
  $\Rightarrow \quad |X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| \leq \sum_{y \in Y} 1 = |Y|$.
  Wegen $|X| = |Y|$ muss $|f^{-1}(y)| = 1 \; \forall y \in Y$ gelten
  $\Rightarrow \quad f$ ist surjektiv, da jedes Element aus Y zu $f(X)$ gehört.

- "$b) \Rightarrow a)$": Sei $f : X \to Y$ surjektiv
  $\Rightarrow \quad |f^{-1}(y)| \geq 1 \; \forall y \in Y$ (mehrere Urbilder möglich)
  $\Rightarrow \quad |Y| = \sum_{y \in Y} 1 \leq |f^{-1}(y)| = |X|$.
  Wegen $|X| = |Y|$ muss $|f^{-1}(y)| = 1 \; \forall y \in Y$ gelten
  $\Rightarrow \quad f$ ist injektiv, da keine zwei Elemente aus X auf dasselbe $y \in Y$ abgebildet werden.

$\square$

5.18 Folgerungen

Aus dem Beweis von 5.17 folgt für endliche Mengen X, Y:

- Ist $f : X \to Y$ injektiv , dann ist $|X| \leq |Y|$.
- Ist $f : X \to Y$ surjektiv , dann ist $|X| \geq |Y|$.

Die Kontraposition zu (a) ergibt:

5.19 Satz (Schubfachprinzip)

Seien X und Y endliche Mengen. Dann ist eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $|X| > |Y|$ nicht injektiv.

Anders formuliert:
Seien m Objekte in n Kategorien (“Schubfächer”) eingeteilt. Wenn $m > n$ ist, gibt es mindestens eine Kategorie, die mehr als 1 Objekt enthält.

5.20 Beispiele

a) Unter 13 Personen gibt es mindestens 2, die im selben Monat Geburtstag haben.

b) In jeder Gruppe von 2 oder mehr Personen gibt es mindestens 2, die die gleiche Anzahl von Bekannten innerhalb dieser Gruppe haben.

Dabei sei ”bekannt” eine symmetrische, nicht reflexive Relation.

Beweis:
Objekte: alle m Personen der Gruppe.
Kategorien: Personen mit gleicher Anzahl von Bekannten.
$K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}$: Personen mit $0, 1, \ldots, m-1$ Bekannten.

Das Schubfachprinzip[3] ist jedoch nicht direkt anwendbar, da die Objektzahl m identisch mit Kategorienzahl ist.

Es gibt jedoch eine Kategorie, die nicht auftritt. Denn: *(i)* Angenommen, eine Person ist in K_{m-1}

$\Rightarrow$ Sie kennt alle anderen

$\Rightarrow$ Alle anderen haben mindestens 1 Bekannten

$\Rightarrow$ K_0 ist leer.

(ii) Falls keine Person in K_{m-1} ist, ist K_{m-1} leer.

Also ist das Schubfachprinzip anwendbar und die Behauptung bewiesen.

$\square$

[3] engl. “pigeonhole principle”, daher auch Taubenschlagprinzip

Kapitel 6

PRIMZAHLEN UND TEILER

6.1 Bedeutung in der Informatik

Wichtige Algorithmen in der Kryptographie (z.B. RSA-Algorithmus[1]) beruhen auf grundlegenden Ergebnissen der Zahlentheorie: Es ist einfach, 2 große Primzahlen [2] zu multiplizieren, aber schwierig, eine große Zahl schnell in ihre Primfaktoren zu zerlegen.

6.2 Satz (Division mit Rest)

Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ und jeder Zahl $b \in \mathbb{N}$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = q * b + r\,, \quad 0 \leq r < b\,.$$

Wir nennen q den <u>Quotienten</u> und r den <u>Rest</u> der Division von a durch b.

a heißt <u>Dividend</u>, und b ist der <u>Divisor</u>.

<u>Beweis:</u>
Betrachte den Fall $a \geq 0$. Sei q die größte ganze Zahl mit $q * b \leq a$.
Dann gibt es ein $r \geq 0$ mit $q*b+r = a$. Ferner gilt $r < b$, denn andernfalls wäre q nicht maximal gewesen.
Den Fall $a < 0$ zeigt man analog.

□

Besonders interessant ist der Fall $r = 0$ und die Erweiterung $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

[1]benannt nach den Entwicklern Rivest, Shamir und Adleman
[2] aus dem Lateinischen (numerus primus), “die erste Zahl”

6.3 Definition ”b teilt a”

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Wir sagen ”b teilt a”, d.h. $b|a$, wenn es ein $q \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a = qb$. In diesem Fall heißt b Teiler von a.

Falls b kein Teiler von a ist, schreiben wir $b \nmid a$.

Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt Primzahl (“ist prim”), wenn sie nur die trivialen Teiler $\pm p$ und ± 1 hat.

Zahlen, die nicht prim sind, heißen zusammengesetzt.

6.4 Beispiele

a) $-7|63$, da $63 = (-9) * (-7)$

b) 11 ist prim

c) 35 ist zusammengesetzt: $35 = 5 * 7$

Folgende Teilbarkeitsregeln sind leicht zu zeigen.

6.5 Satz (Teilbarkeitsregeln)

a) Aus $a|b$ und $b|c$ folgt $a|c$.

(Bsp.: Aus $3|12$ und $12|24$ folgt $3|24$.)

b) Aus $b_1|a_1$ und $b_2|a_2$ folgt $b_1 * b_2 \mid a_1 * a_2$.

(Bsp.: Aus $2|4$ und $7|21$ folgt $14|84$.)

c) Aus $b|a_1$ und $b|a_2$ folgt $b \mid \alpha * a_1 + \beta * a_2 \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

(Bsp.: Aus $3|6$ und $3|9$ folgt $3 \mid (2 * 6 + 3 * 9)$.)

d) Aus $a|b$ und $b|a$ folgt $|a| = |b|$.

6.6 Satz (Fundamentalsatz der Zahlentheorie)

Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist als Produkt endlich vieler (nicht notwendig verschiedener) Primzahlen darstellbar (Primfaktorzerlegung).
Diese Zerlegung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

Beweis: z.B. im Buch von Brill: Mathematik für Informatiker, S. 60-63.

Beispiel: $84 = 2^2 * 3 * 7$ ist eine Primzahlfaktorisierung.

Bemerkung: Jede Primzahl stellt bereits einen Faktor dar, z.B. kann man *nicht* die 3 in der Form $3 = 3 * 1$ zerlegen, da die Eins keine Primzahl ist.
Dieser Kunstgriff ist notwendig, um die Eindeutigkeit der Zerlegung zu gewährleisten: Würde man die Eins als Faktor zulassen, so würde man wegen $a = a * 1 * 1 * \ldots * 1$ für alle $a \in \mathbb{N}$ beliebig viele weitere (1-) Faktoren erhalten.

6.7 Primzahlfaktorisierung großer Zahlen ist aufwändig

Ein einfaches (nicht sehr effizientes) Verfahren zur Primzahlfaktorisierung ist das Sieb des Erathostenes (Erathostenes von Kyrene, ca. 276-194 v. Chr.):

- Um zu prüfen, ob n prim ist, genügt es, für jede Primzahl $p \leq \sqrt{n}$ zu testen, ob sie n teilt.
- Findet man einen Teiler p, setzt man das Verfahren mit $\frac{n}{p}$ fort.
- Findet man im Bereich $2 \leq p \leq \sqrt{n}$ keinen Teiler von n, so ist n selbst prim.

6.8 Beispiel

Zur Primzahlfaktorisierung von 84 genügt es, alle Primzahlen $\leq \sqrt{84} \approx 9.17$ zu testen, d.h. $2, 3, 5, 7$.

Wegen $7|84$ fährt man mit $\frac{84}{7} = 12$ fort.

Hier müssen nur noch 2 und 3 getestet werden.

$\frac{12}{3} = 4$
$4 = 2 * 2$
$\Rightarrow \quad 84 = 7 * 3 * 2^2$

6.9 Definition (größter) gemeinsamer Teiler

Sind $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und gilt $d|a$ und $d|b$, so heißt d gemeinsamer Teiler von a und b.

Wenn für jeden anderen gemeinsamen Teiler c von a und b gilt: $c|d$,
dann heißt d größter gemeinsamer Teiler (ggT; englisch: gcd für "greatest common divisor"):

$d = ggT(a, b)$.

6.10 Beispiel

$ggT(84, 66) = 6$, denn 84 und 66 haben die Primfaktorzerlegung

$$84 = 2^2 * 3 * 7 \text{ und } 2 * 3 * 11\,.$$

ggT ist das Produkt der gemeinsamen Faktoren 2 und 3.

Gibt es einen schnellen Algorithmus zur Berechnung des ggT?

Hierzu benötigen wir einen Hilfssatz (Lemma).

6.11 Lemma (Eigenschaften des ggT)

Seien $a, b, q \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

a) $d = ggT(a,b) \;\Leftrightarrow\; d = ggT(b, a - qb)$

b) Ist $a = qb$, so gilt $b = ggT(a,b)$

Beispiele:

zu a) $b = ggT(84, 66) \;\Leftrightarrow\; 6 = ggT(66, 84 - 1 * 66) = ggT(66, 18)$

zu b) $84 = 7 * 12 \;\Rightarrow\; 12 = ggT(84, 12)$

Beweis des Lemmas:

- Wir zeigen nur "$\Rightarrow$" ("$\Leftarrow$" geht ähnlich).

  Sei also $d = ggT(a,b)$.
  Aus $d|a$ und $d|b$ folgt mit 6.5(c): $d \mid a - qb$.
  Also ist d gemeinsamer Teiler von b und $a - qb$.
  Um zu zeigen, dass d auch größter gemeinsamer Teiler ist, betrachten wir einen weiteren gemeinsamen Teiler c und zeigen $c|d$:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} c|b \Rightarrow c|qb \\ c|a-qb \end{array}\right\} c \mid (a-qb)+qb, \text{ d.h. } c|a, \\ \qquad\qquad\quad \text{nach Vor. } c|b \end{array}\right\} c|d, \text{ da } d = ggT(a,b).$$

b) Prüfe Definition des ggT für b nach:
   Aus $a = qb$ folgt $b|a$.
   Wegen $b|b$ ist b gemeinsamer Teiler von a und b.
   Sei c ein weiterer gemeinsamer Teiler von a und b: $c|a$, $c|b$.
   Wegen $c|b$ ist $b = ggT(a,b)$.

$\square$

Dieses Lemma bildet die Grundlage des Euklidischen Algorithmus'.

6.12 Satz (Euklidischer Algorithmus zur Bestimmung des ggT)

Für die natürlichen Zahlen a und b mit $a > b$ setzen wir $r_0 := a$, $r_1 := b$ und berechnen folgende Divisionen mit Rest:

$$
\begin{aligned}
r_0 &= q_0 r_1 + r_2 \qquad (0 < r_2 < r_1)\\
r_1 &= q_1 r_2 + r_3 \qquad (0 < r_3 < r_2)\\
&\vdots\\
r_{n-2} &= q_{n-2} r_{n-1} + r_n \qquad (0 < r_n < r_{n-1})\\
r_{n-1} &= q_{n-1} r_n \qquad \text{(Verfahren terminiert ohne Rest)}
\end{aligned}
$$

Dann ist $r_n = ggT(a, b)$.

6.13 Beispiel

Gesucht: $ggT(133, 91)$
Euklidischer Algorithmus:
$133 = 1 * 91 + 42$
$91 = 2 * 42 + 7$
$42 = 6 * 7$
Also ist $7 = ggT(133, 91)$.

6.14 Beweis von Satz 6.12

Die Reste r_j werden in jedem Schritt echt kleiner.
⇒ Der Algorithmus terminiert nach endlich vielen Schritten mit Rest 0.
Für $ggT(a, b) = ggT(r_0, r_1)$ gilt nach Lemma 6.11(a):

$$ggT(r_0, r_1) = ggT(r_1, \underbrace{r_0 - q_0 r_1}_{r_2}) = ggT(r_1, r_2)$$

$$ggT(r_1, r_2) = ggT(r_2, \underbrace{r_1 - q_1 r_2}_{r_3}) = ggT(r_2, r_3)$$

$$\vdots$$

$$ggT(r_{n-2}, r_{n-1}) = ggT(r_{n-1}, \underbrace{r_{n-2} - q_{n-2} r_{n-1}}_{r_n}) = ggT(r_{n-1}, r_n)$$

und somit $ggT(a, b) = ggT(r_{n-1}, r_n)$.

Da $r_{n-1} = q_{n-1} r_n$, folgt nach Lemma 6.11(b):

$$r_n = ggT(r_{n-1}, r_n) \text{ und daher } r_n = ggT(a, b)\,.$$

$\square$

Kapitel 7

MODULARE ARITHMETIK

7.1 Bedeutung in der Informatik

Rechnen mit Kongruenzen ist u.A. wichtig für:

- Suche von Datensätzen in großen Dateien (Hashing)
- Prüfziffern (ISBN , Barcodes)
- Kryptographie
- Generierung von Pseudozufallszahlen

7.2 Definition kongruent modulo m

Zwei Zahlen a, b heißen kongruent modulo m, wenn $m \in \mathbb{N}$ ein Teiler von a-b ist: $m \mid a - b$.
Wir schreiben $a \equiv b \bmod m$ und nennen m Modul.

7.3 Beispiele

- $7 \equiv 22 \bmod 5$, da $5 \mid 7 - 22$
- $8 \not\equiv 22 \bmod 5$, da $5 \nmid 8 - 22$

7.4 Satz (Zusammenhang Kongruenz – Division mit Rest)

Es gilt $a \equiv b \mod m$ genau dann, wenn a und b bei Division durch m den selben Rest besitzen.

Beweis:
"⇒:" Sei $a \equiv b \mod m$. Seien ferner $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = q_1 m + r_1$$
$$b = q_2 m + r_2$$

und $0 \leq r_1, r_2 < m$

$$\Rightarrow \qquad a - b = (q_1 - q_2)m + (r_1 - r_2)\,.$$

Wegen $a \equiv b \mod m$ gilt: $m \mid a - b$

$$\Rightarrow \qquad r_1 - r_2 = 0, \text{ d.h. } r_1 = r_2\,.$$

"⇐:" Sei umgekehrt

$$a = q_1 m + r$$
$$b = q_2 m + r$$
$$\Rightarrow \qquad a - b = (q_1 - q_2)m, \text{ d.h. } m \mid a - b\,.$$

□

7.5 Interpretation als Äquivalenzrelation

Kongruenz modulo m definiert eine Äquivalenzrelation (vgl. Kapitel 4) auf $\mathbb{Z}$, denn es gilt:

- Reflexivität: $a \equiv a \mod m$, da $m|0$
- Symmetrie: $a \equiv b \mod m \;\Rightarrow\; m|a - b$
  $\Rightarrow \quad m \mid b - a \quad \Rightarrow \quad b \equiv a \mod m$
- Transitiviät: Seien $a \equiv b \mod m$ und $b \equiv c \mod m$
  $\Rightarrow \quad m \mid a - b$ und $m|b - c$.
  Mit 6.5(c) folgt $m|(a - b) + (b - c)$, d.h. $m \mid a - c$.
  Somit ist $a \equiv c \mod m$.

□

7.6 Definition Restklassen von $\mathbb{Z}$ modulo m

Die Äquivalenzklassen

$$[b] \;:=\; \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \mod m\}$$

mit $b \in \{0, 1, ..., m - 1\}$ heißen Restklassen von $\mathbb{Z}$ modulo m.

Wir schreiben

$$\mathbb{Z}_m \;:=\; \{[0], [1], \ldots, [m - 1]\}$$

für die Menge aller Restklassen von $\mathbb{Z}$ modulo m.

Können wir in der m-elementigen Menge $\mathbb{Z}_m$ ähnlich rechnen wie in $\mathbb{Z}$?

7.7 Lemma (Addition von Elementen zweier Restklassen)

Seien $[a], [b] \in \mathbb{Z}_m$ und seien $a' \in [a]$ und $b' \in [b]$ beliebig.
Dann ist $a' + b' \in [a + b]$.

Beweis: Für $a' \in [a], b' \in [b]$ existieren $p, q \in \mathbb{Z}$ mit

$$a' - a = p * m$$

$$b' - b = q * m$$

$$\Rightarrow \quad a' + b' = (p * m + a) + (qm + b) = (p + q) * m + (a + b)$$

$$\Rightarrow \quad a' + b' \in [a + b] .$$

□

Dieses Lemma motiviert:

7.8 Definition Modulare Addition

Seien $[a], [b] \in \mathbb{Z}_m$. Wir definieren die (modulare) Addition von $[a], [b]$ durch

$$[a] + [b] := [a + b] .$$

7.9 Beispiel

Additionstafel in $\mathbb{Z}_6$

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

denn es gilt z.B.: $[3] + [5] = [8] = [2]$.

7.10 Satz (Eigenschaften der modularen Addition)

Die Addition in $\mathbb{Z}_m$ hat folgende Eigenschaften:

a) Kommutativgesetz:

$$[a] + [b] = [b] + [a] \quad \forall [a], [b] \in \mathbb{Z}_m$$

b) Assoziativgesetz:

$$([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c]) \quad \forall [a], [b], [c] \in \mathbb{Z}_m$$

c) $[0]$ ist neutrales Element der Addition:

$$[a] + [0] = [a] \quad \forall [a] \in \mathbb{Z}_m$$

c) Inverses Element: Zu jedem $[a] \in \mathbb{Z}_m \; \exists \, [b] \in \mathbb{Z}_m$ mit $[a] + [b] = [0]$.

Beweis:

a) $[a] + [b] = [a + b] = [b + a] = [b] + [a]$

b) $([a] + [b]) + [c] = [a + b] + [c] = [a + b + c] = [a] + [b + c] = [a] + ([b] + [c])$

c) $[a] + [0] = [a + 0] = [a]$

d) Das inverse Element zu $[a]$ ist $[m - a]$, denn
$[a] + [m - a] = [a + m - a] = [m] = [0]$.

□

Kann man auf ähnliche Weise auch eine Multiplikation einführen?

7.11 Lemma (Multiplikation von Elementen zweier Restklassen)

Seien $[a], [b] \in \mathbb{Z}_m$ und seien $a' \in [a]$ und $b' \in [b]$ beliebig. Dann ist

$$a' * b' \in [a * b].$$

Beweis: Für $a' \in [a], b' \in [b]$ existieren $p, q \in \mathbb{Z}$ mit

$$a' - a = pm \,, \qquad b' - b = qm$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad a' * b' &= (pm + a) * (qm + b) \\ &= pqm^2 + pmb + qma + ab \\ &= (pqm + pb + qa)m + ab \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a' * b' \in [a * b] \,.$$

□

Dieses Lemma motiviert

7.12 Definition Modulare Multiplikation

Seien $[a], [b] \in \mathbb{Z}_m$. Wir definieren die (modulare) Multiplikation von $[a]$ und $[b]$ durch

$$[a] * [b] \ := \ [a * b] \, .$$

7.13 Beispiel

Multiplikationstafel in $\mathbb{Z}_6$

*	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[2]	[0]	[2]	[4]	[0]	[2]	[4]
[3]	[0]	[3]	[0]	[3]	[0]	[3]
[4]	[0]	[4]	[2]	[0]	[4]	[2]
[5]	[0]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

denn es gilt z.B. $[2] * [5] = [10] = [4]$.

Beachte:

a) Es kommen im allgemeinen nicht alle Elemente in jeder Zeile/Spalte vor. Manche fehlen, manche treten mehrfach auf.

b) Aus $[a] * [b] = 0$ folgt im allgemeinen nicht $[a] = 0$ oder $[b] = 0$.

7.14 Satz (Eigenschaften der modularen Multiplikation)

Die Multiplikation in $\mathbb{Z}_m$ hat folgende Eigenschaften:

a) Kommutativgesetz: $[a] * [b] = [b] * [a] \quad \forall \, [a], [b] \in \mathbb{Z}_m$

b) Assoziativgesetz: $[a] * ([b] * [c]) = ([a] * [b]) * [c] \quad \forall \, [a], [b], [c] \in \mathbb{Z}_m$

c) Existenz des neutralen Elementes der Multiplikation:
$[1]$ ist neutrales Element, d.h. $[1] * [a] = [a] \quad \forall a \in \mathbb{Z}_m$.

Beweis: Ähnlich elementar wie der Beweis von Satz 7.10.

$\square$

7.15 Bemerkung

Offensichtlich findet man nicht zu jedem Element $[a] \in \mathbb{Z}_m \setminus \{[0]\}$ ein inverses Element $[b]$ bzgl. der Multiplikation (d.h. $[a] * [b] = [1]$).

Beispiel 7.13 zeigt, dass $[2], [3]$ und $[4]$ kein Inverses haben. Gibt es einen Grund dafür?

7.16 Satz (Multiplikative inverse Elemente in $\mathbb{Z}_m$)

$[a] \in \mathbb{Z}_m \setminus \{[0]\}$ hat genau dann ein inverses Element bzgl. der Multiplikation, wenn a und m teilerfremd sind (d.h. $ggT(a,m) = 1$).

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $[b]$ ein multiplikatives Inverses zu $[a] \in \mathbb{Z}_m \setminus \{[0]\}$

$$\Rightarrow [1] = [a] * [b] = [a * b]$$

$$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \text{ s.d. } a * b - 1 = qm\,. \quad (*)$$

Um zu zeigen, dass $ggT(a,m) = 1$ ist, zeigen wir, dass für jeden Teiler c von a und m gilt: $c|1$.

Für $c|a$ und $c|m$ folgt mit Satz 6.5 c): $c|(ab - qm)$.
Wegen (*) bedeutet dies $c|1$.

"$\Leftarrow$" Siehe z.B. Beutelspacher / Zschiegner: Diskrete Mathematik für Einsteiger, Vieweg, 2002 (Satz 5.3.4).

□

7.17 Folgerung

Falls p eine Primzahl ist, so ist p teilerfremd zu jedem $a \in \{1, 2, ..., p-1\}$.

Wegen Satz 7.16 hat dann jedes Element in $\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]\} = \{[1], [2], ..., [p-1]\}$ ein multiplikatives Inverses.

TEIL B: EINDIMENSIONALE ANALYSIS

Bedeutung in der Informatik

- Analysis beschäftigt sich mit Grenzwerten, Differentiation, Integration.
- Viele Erscheinungen in den Natur- und Ingenieurswissenschaften lassen sich mit Hilfe der Analysis beschreiben.
- In der Informatik sehr wichtig z.B. bei Komplexitätsabschätzungen und in physiknahen Bereichen wie Visual Computing.

Kapitel 8

AXIOMATIK DER REELLEN ZAHLEN

8.1 Motivation

- Analysis verwendet grundlegende Eigenschaften der reellen Zahlen.
- Reelle Zahlen bilden die Grundlage allen Messens.
- Mit Messergebnissen kann man rechnen, Vergleiche anstellen und Grenzwerte betrachten.

Wir wollen diese Eigenschaften zunächst formalisieren, um zu sehen, was die reellen Zahlen gegenüber anderen Zahlbereichen (wie z.B. $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$) auszeichnet.

Die Rechenregeln auf $\mathbb{R}$ lassen sich durch die Gruppen- und Körperstruktur formalisieren.

8.2 Definition kommutative (abelsche) Gruppe

Eine kommutative (abelsche) Gruppe[1] $(G, \circ)$ besteht aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\circ\,:\, G \times G \mapsto G$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Assoziativgesetz: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall a, b, c \in G$

b) Neutrales Element: $\exists e \in G$ s.d. $e \circ a = a \quad \forall a \in G$

c) Inverse Elemente: Zu jedem $a \in G$ existiert ein $b \in G$ mit $a \circ b = e$

d) Kommutativgesetz: $a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in G$

[1] nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802-1829)

8.3 Beispiele

a) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit 0 als neutralem Element.

b) $(\mathbb{Z}_m, +)$ ist eine kommutative Gruppe (vgl. 7.10).

c) $(\mathbb{R}, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit 0 als neutrales Element.

d) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$ ist eine kommutative Gruppe mit 1 als neutralem Element.

8.4 Definition Körper

Ein Körper (engl: field) $(K, +, *)$ besteht aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen $+, * : K \times K \mapsto K$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe. Wir bezeichnen das neutrale Element mit 0, und das Inverse zu $a \in K$ mit $-a$.

b) $(K \setminus \{0\}, *)$ ist eine kommutative Gruppe. (Oft setzt man $K^* := K \setminus \{0\}$.)
Das neutrale Element wird mit 1 bezeichnet und das Inverse zu $a \in K^*$ mit $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

c) Es gilt das Distributivgesetz: $(a + b) * c = a * c + b * c \quad \forall a, c, b \in K$.
(Wir gehen davon aus, daß $*$ stärker bindet als $+$).

Bemerkung. Mit $a - b := a + (-b)$ und $\frac{a}{b} := a * b^{-1}$ existieren in einem Körper auch Subtraktion und Division ($b \neq 0$).

8.5 Beispiele

a) $(\mathbb{Q}, +, *)$ und $(\mathbb{R}, +, *)$ sind Körper.

b) $(\mathbb{Z}, +, *)$ ist kein Körper, da es nicht für jedes $x \in \mathbb{Z}^*$ ein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}^*$ gibt.

c) $(\mathbb{Z}_p, +, *)$ ist ein Körper g.d.w. p prim ist. (Vgl. 7.10, 7.14 und 7.17.)

Neben Addition und Multiplikation gibt es in $\mathbb{R}$ auch die Möglichkeit, Vergleiche durchzuführen. Wie lässt sich dies formalisieren?

8.6 Definition angeordnete Körper

Ein Körper $(K, +, *)$ heißt angeordnet, wenn es eine Teilmenge P (den Positivbereich) gibt mit:

a) $P, \{0\}$ und $-P := \{x \in K | -x \in P\}$ bilden eine Partition (vgl. 4.8) von K.

b) P ist abgeschlossen bzgl. $*, + : x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ und $x * y \in P$.

8.7 Definition $<, \leq, >, \geq$

Sei $(K, +, *)$ ein angeordneter Körper mit Positivbereich P. Dann sind für $x, y \in P$ folgende Ordnungen definiert:

- $x < y \;\Leftrightarrow\; y - x \in P$
- $x \leq y \;\Leftrightarrow\; x = y$ oder $x < y$
- $x > y \;\Leftrightarrow\; y < x$
- $x \geq y \;\Leftrightarrow\; y \leq x$

8.8 Folgerungen

Der Positivbereich enthält die positiven Zahlen: $x \in P \;\Rightarrow\; x > 0$.

Beweis: Sei $x \in P$.
0 ist neutrales Element von $(K, +)$

$$\Rightarrow 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -0$$

$$\Rightarrow x - 0 \in P \text{ , da -0=0 neutrales Element}$$

$$\Rightarrow x > 0 \text{ (nach 8.7).}$$

□

Welche Eigenschaften haben angeordnete Körper?

8.9 Satz (Eigenschaften angeordneter Körper)

Sei $(K, +, *)$ ein angeordneter Körper, dann gilt:

a) Vergleichbarkeit: Seien $x, y \in K$. Dann ist entweder $x < y, x = y$ oder $x > y$.

b) Transitivität: $x < y,\, y < z \;\Rightarrow\; x < z \quad \forall x, y, z \in K$.

c) Verträglichkeit der Anordnung mit der Addition:
Sei $x < y$ und $z \leq w \Rightarrow x + z < y + w$.

d) Verträglichkeit der Anordnung mit der Multiplikation:

$$x < y \text{ und } z > 0 \;\Rightarrow\; x * z < y * z$$

$$x < y \text{ und } z < 0 \;\Rightarrow\; x * z > y * z$$

d) – Invertierung bzgl. Addition:

$$x > 0 \Rightarrow -x < 0$$

$$x < y \Rightarrow -x > -y$$

– Invertierung bzgl. Multiplikation

$$0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}.$$

f) Positivität der Quadrats: $x \neq 0 \Rightarrow x * x > 0$.

Beweis: Z.T. als Übungsaufgabe.

□

8.10 Konsequenzen

a) In einem angeordneten Körper $(K, +, *)$ ist $1 > 0$.

<u>Beweis:</u> Da $(K^*, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1 ist, ist $1 \neq 0$. Nach 8.9 f) folgt: $0 < 1 * 1 = 1$.

□

b) Jeder angeordnete Körper K enthält $\mathbb{N}$ als Teilmenge.

<u>Beweis:</u> Aus $0 < 1$ folgt mit 8.9 c):

$$1 < \underbrace{1+1}_{=:2} < \underbrace{1+1+1}_{=:3} < ...$$

□

Endliche Körper wie z.B. $(\mathbb{Z}_p, +, *)$ können nicht angeordnet sein.

Offensichtlich sind $(\mathbb{Q}, +, *)$ und $(\mathbb{R}, +, *)$ angeordnete Körper. Worin unterscheiden sich $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$?

8.11 Definition Maximum, Minimum

Sei $(\mathbb{K}, +, *)$ ein angeordneter Körper, und $M \subset K$.

Ein Element $x \in M$ heißt <u>Maximum</u> von M ($x = \max\ M$) falls $x \geq y \quad \forall y \in M$.

$x \in M$ heißt <u>Minimum</u> von M ($x = \min\ M$) falls $x \leq y \quad \forall y \in M$.

8.12 Satz (Eindeutigkeit von Minimum und Maximum)

Hat M eine Minimum oder Maximum, so ist dieses eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien x_1, x_2 zwei Maxima. Dann gilt:

$$x_1 \geq x_2 \quad \text{(da } x_1 \text{ Maximum)}\,,$$

$$x_2 \geq x_1 \quad \text{(da } x_2 \text{ Maximum)}\,.$$

Wegen der Vergleichbarkeit 8.9(a) folgt $x_1 = x_2$.

□

8.13 Beispiele

Sei $K = \mathbb{Q}$.

a) $M_1 := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x \leq 2\} \Rightarrow \max M_1 = 2$, da $2 \in M_1$ und $x \leq 2\ \forall x \in \mathbb{Q}$.

b) $M_2 := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x < 2\}$ hat kein Maximum, denn zu jedem $x \in M_2\ \exists y \in M_2$ mit $y > x$: Wähle z.B. $y = \frac{x+2}{2}$. Dann ist $x < y < 2$.

c) $M_3 := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 \leq 2\}$ hat kein Maximum. Denn ist x Maximum, so ist $x^2 = 2$ oder $x^2 < 2$. Für $x^2 = 2$ ist $x \notin \mathbb{Q}$ (vgl 3.7). Für $x^2 < 2$ findet man ähnlich wie in b) eine Zahl $y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$ und $y^2 < 2$.

8.14 Definition (kleinste) obere Schranke, Supremum, (größte) untere Schranke, Infimum

Sei $(K, +, *)$ ein angeordneter Körper und $M \subset K$.

M heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $x \in K$ (nicht notwendigerweise $x \in M$) gibt mit $y \leq x$ für alle $y \in M$. Dann heißt x obere Schranke von M.

Ein Element $s \in K$ heißt kleinste obere Schranke (Supremum) von M ($s = \sup \text{ M}$) wenn für jede andere obere Schranke x gilt: $x \geq s$.

Analog definiert man nach unten beschränkt, untere Schranke, Infimum, $r = \inf \text{ M}$.

8.15 Beispiele

Wir betrachten wieder $K = \mathbb{Q}$ und die Beispiele 8.13.

a) $M_1 := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x \leq 2\}$

- hat viele obere Schranken, z.B. 10000, 7, 2.

- Kleinste obere Schranke: $\sup M_1 = 2$.
- M_1 ist nicht nach unten beschränkt.

b) $M_2 := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x < 2\}$

- hat die gleichen oberen Schranken wie M_1.
- Obwohl kein Maximum existiert, gibt es ein Supremum: $\sup M_2 = 2$.

c) $M_3 := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 \leq 2\}$

- hat viele obere Schranken, z.B. 1000, 7, 1.43.
- Es gibt jedoch keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$, da $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Diese Beispiele illustrieren:

a) Wenn eine Menge ein Maximum hat so ist dieses auch Supremum.

b) Es gibt Mengen, die kein Maximum besitzen, jedoch ein Supremum.

c) In $\mathbb{Q}$ gibt es Mengen, die obere Schranken besitzen, jedoch keine kleinste obere Schranke.

8.16 Definition vollständig angeordnete Körper

Ein angeordneter Körper heißt vollständig, wenn in ihm jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt.

Man kann zeigen:

8.17 Satz (Axiomatische Charakterisierung von $\mathbb{R}$)

Es gibt genau einen vollständigen angeordneten Körper:
Der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Mit Hilfe der Unbeschränktheit der natürlichen Zahlen zeigt man:

8.18 Satz (Eigenschaften der reellen Zahlen)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) Zu $x, y > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$ (Archimedisches "Axiom").

b) Zu $x > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x$.

c) Zu $x \in \mathbb{R} \; \exists m = \max\{z \in \mathbb{Z} \,|\, z \leq x\}$.

8.19 Definition (Absolut-) Betrag

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

(Absolut-) Betrag von x.

8.20 Satz (Eigenschaften des Betrages)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

a) $|x| \geq 0$
$|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

b) $|x * y| = |x| * |y|$

c) $|x + y| \leq |x| + |y|$

d) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

e) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

Kapitel 9

KOMPLEXE ZAHLEN

9.1 Motivation

Neue Zahlbereiche entstehen oft aus dem Wunsch, bestimmte Gleichungen zu lösen.

Beispiele:

a) $x + 3 = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{N}$, aber in $\mathbb{Z}$.

b) $5x = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{Z}$, aber in $\mathbb{Q}$.

c) $x^2 = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{Q}$, aber in $\mathbb{R}$.

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Ein neuer Zahlbereich, die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, erlaubt es uns, auch solche Gleichungen zu lösen [1] .

Komplexe Zahlen sind nützlich in der Elektrotechnik und in der technischen Informatik zur Beschreibung von Schwingungen in Schaltkreisen, und im Audiobereich sowie im Visual-Computing-Bereich zur Frequenzanalyse von Bildern.

9.2 Grundidee

Wir betten $\mathbb{C}$ in $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ein, indem wir $\mathbb{R}$ als die x-Achse $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ interpretieren.

Wir suchen eine Erweiterung der Addition und der Multiplikation von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$, so dass:

a) Ihre Einschränkung auf $\mathbb{R}$ die bisherige Multiplikation / Addition liefert:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)\,,$$

$$(a, 0) * (b, 0) = (a * b, 0)\,.$$

[1] Die Idee stammt von den italienischen Mathematikern Gerolamo Cardano und Rafael Bombelli aus dem 16. Jahrhundert

b) Die Gleichung $z^2 = -1$ in $\mathbb{C}$ lösbar ist, d.h. es existiert ein $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ mit

$$(a,b)(a,b) = (-1,0)\,.$$

c) $(\mathbb{C},+,*)$ ein Körper ist.

9.3 Definition Addition, Multiplikation in $\mathbb{C}$

Auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ sind folgende Verknüpfungen definiert:

a) Addition: $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \quad \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$

b) Multiplikation: $(a,b)*(c,d) = (ac-bd, ad+bc) \quad \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$

9.4 Konsequenzen

Mit Definition 9.3 gilt:

a) Einschränkung auf x-Achse liefert Addition/Multiplikation der reellen Zahlen:

$$(a,0)+(c,0) = (a+c,0)\,,$$
$$(a,0)*(c,0) = (a*c,0)\,.$$

b) Das neutrale Element der Multiplikation in $\mathbb{C}$ ist $(1,0)$:

$$(1,0)*(c,d) = (c,d)\,.$$

c) In $\mathbb{C}$ existiert $\sqrt{-1}$, denn:

$$(0,1)*(0,1) = (-1,0)\,.$$

Für $(0,1)$ schreiben wir i (imaginäre Einheit) [2].

9.5 Satz (Körpereigenschaft der komplexen Zahlen)

$(\mathbb{C},+,*)$ bildet einen Körper, den Körper der komplexen Zahlen.

Beweis: Elementar, abgesehen von der Existenz des multiplikativen Inversen.

Für $(a,b) \neq (0,0)$ gilt: $(a,b)^{-1} := \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

Denn:

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2}\right)$$
$$= (1,0)\,.$$

□

[2] Die Einführung der imaginären Einheit i als neue Zahl wird Leonhard Euler (schweizer Mathematiker, 1707-1783) zugeschrieben

9.6 Praktisches Rechnen mit Komplexen Zahlen

Statt (a, b) schreibt man $a + ib$, verwendet $i^2 = -1$ (vgl 9.4.c)), und rechnet ansonsten wie mit reellen Zahlen. So erhält man beispielsweise direkt Definition 9.3:

a) Addition:
$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

b) Multiplikation:
$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$

9.7 Definition Realteil, Imaginärteil, komplex konjugiertes Element, Betrag

Bei einer komplexen Zahl $z = a + ib$ heißt a Realteil ($a = \mathrm{Re}(z)$) und b Imaginärteil ($b = \mathrm{Im}(z)$).
Ferner nennt man $\overline{z} = a - ib$ das (komplex) konjugierte Element zu z.
Den Betrag von z definiert man durch

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(a + ib)(a - ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

9.8 Geometrische Interpretation

Betrachtet man $z = a + ib$ als Vektor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, so ist $\overline{z}$ der an der x-Achse gespiegelte Vektor, und $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist die Länge des Vektors.

9.9 Wozu ist das konjugierte Element noch nützlich?

Z.B. um bei komplexen Brüchen $\dfrac{a + ib}{c + id}$ den Nenner reellwertig zu machen. Hierzu erweitert man mit $c - id$:

$$\frac{a + ib}{c + id} * \frac{c - id}{c - id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,.$$

Welche Bedeutung hat die Lösbarkeit von $z^2 = -1$ in $\mathbb{C}$?

Man kann zeigen:

9.10 Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes komplexwertige Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ vom Grad $n > 0$ hat (mindestens) eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Man kann $p(z)$ in n Linearfaktoren zerlegen: Es existieren komplexe Zahlen $z_1, \dots, z_n$, so dass

$$p(z) = a_n(z - z_1) * (z - z_2) * ... * (z - z_n)\,.$$

(Ein Linearfaktor hat für Polynome eine ähnliche Bedeutung wie ein Primfaktor für eine ganze Zahl.)

9.11 Beispiel

$p(z) = 2z^2 - 3z + 5$ hat die Nullstellen: (abc-Formel)

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 * 2 * 5}}{2 * 2} = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{31} * \sqrt{-1}}{4} = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{31}}{4} i$$

$\Rightarrow$

$$p(z) = 2(z - z_1)(z - z_2) = 2\left(z - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{31}}{4} i\right)\left(z - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{31}}{4} i\right).$$

9.12 Bemerkungen:

a) Wegen Satz 9.10 sagt man: ”$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen”.

b) Im Gegenteil zu $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ kann man $\mathbb{C}$ nicht anordnen.

Kapitel 10

FOLGEN

10.1 Motivation

In der Informatik gibt es zwei Möglichkeiten, Objekte zu repräsentieren:

a) Explizit als Datenstruktur im Speicher.
Bsp.: $\sqrt{2} = 1,4142...$

b) Implizit als Berechnungsvorschrift.
Bsp.: Programm, das $\sqrt{2}$ iterativ immer genauer annähert.

In den Situationen, wo (b) günstiger ist, benötigt man Kenntnisse über Folgen und ihre Grenzwerte.

10.2 Definition Reellwertige Folge

Eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \to f(n) := a_n$$

heißt (reellwertige) Folge. Wir nennen a_n das n-te Glied der Folge, und wir kürzen die Folge mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (a_n) oder einfach nur a_n ab.

Bemerkung: Viele (jedoch nicht alle) der folgenden Resultate lassen sich auch auf andere Wertebereiche (z.B. $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$) übertragen.

10.3 Beispiele

a) Konstante Folge: $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$

c) $(\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$

d) Die Fibonacci-Folge ist rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1\,, a_2 := 1\,,$$

$$a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für} \quad \text{n} \ \geq \ 3\,.$$

Dies ergibt die Folge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$
Sie spielt eine fundamentale Rolle in vielen Naturvorgängen, insbesondere bei Wachstumsprozessen.

10.4 Definition (streng) monoton wachsende / fallende Folgen

Eine reellwertige Folge (a_n) heißt monoton wachsend falls $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt sogar $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, so ist sie streng monoton wachsend.

Analog definiert man (streng) monoton fallend.

(a_n) heißt nach oben / unten beschränkt, wenn $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ nach oben / unten beschränkt ist. Entsprechend werden $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ als das Supremum / Infimum von $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ definiert.

Wie kann man das Konvergenzverhalten einer Folge beschreiben?

10.5 Definition ε-Umgebung, Konvergenz, Grenzwert, Limes, Divergenz

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann nennen wir $U_\epsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - a| < \epsilon\}$ die ϵ-Umgebung von a. Eine Folge (a_n) heißt konvergent gegen a, wenn in jeder ϵ-Umgebung von a fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgeglieder liegen:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \ : \ |a_n - a| < \epsilon \ \forall n \geq n_0(\epsilon)\,.$$

Man schreibt

”$\lim_{n\to\infty} a_n = a$” oder ”$a_n \to a$ für $n \to \infty$”.

Die Zahl a heißt Grenzwert (Limes) der Folge (a_n). Eine reellwertige Folge heißt divergent, wenn sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

10.6 Beispiele

a) Die konstante Folge ist konvergent:

$$a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a\,.$$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ denn:
Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert nach 8.18(b) ein $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \epsilon$.
Wegen $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ $\forall n \geq n_0$ ist $\frac{1}{n} \in U_\epsilon(0) \quad \forall n \geq n_0$.

Bemerkung: Folgen, die gegen 0 konvergieren, heißen Nullfolgen.

c) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

10.7 Definition bestimmte Divergenz, uneigentliche Konvergenz

Sei (a_n) eine Folge. Dann strebt a_n gegen ∞ ($\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$), falls für jedes $r > 0$ ein $n_0(r) \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > r$ $\forall n \geq n_0$. In diesem Fall spricht man auch von uneigentlicher Konvergenz, oder bestimmter Divergenz.

Analog definiert man $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, falls für jedes $r < 0$ ein $n_0(r) \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n < r$ $\forall n \geq n_0(r)$.

10.8 Beispiel

- $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$

Können unbeschränkte Folgen konvergieren?

10.9 Satz (Beschränktheit konvergenter Folgen)

Eine konvergente Folge ist beschränkt (d.h. sie ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt).

Beweis: Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann existiert n_0 mit $a_n \in U_1(a)$ $\forall n \geq n_0$. Damit ist $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in der beschränkten Menge $\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}\} \cup U_1(a)$ enthalten.

$\square$

Kann es mehrere Grenzwerte geben?

10.10 Satz (Eindeutigkeit des Grenzwertes)

Konvergiert eine Folge (a_n), so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

Beweis: Annahme: (a_n) habe zwei Grenzwerte a,b mit $a \neq b$. Wähle ϵ so, das $\epsilon < \frac{|a-b|}{2}$.
Dann ist $U_\epsilon(a) \cap U_\epsilon(b) = \emptyset$.

Da a, b Grenzwerte von (a_n) sind, existieren $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ mit:

$$a_n \in U_\epsilon(a)\ \forall n \geq n_0\,,$$

$$a_n \in U\epsilon(b)\ \forall n \geq n_1\,,$$

d.h. $a_n \in (U_\epsilon(a) \cap U_\epsilon(b)) \quad \forall n \geq \max(n_0, n_1)$.
Dies wiederspricht $U_\epsilon(a) \cap U_\epsilon(b) = \emptyset$.

□

Gibt es Kriterien zum Nachweis von Konvergenz?

10.11 Satz (Konvergenzkriterien)

a) Vergleichskriterium
Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit
$a_n \leq b_n \leq c_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n := b$.
Dann konvergiert (b_n) und es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

b) Cauchy-Kriterium [1]
Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, d.h.

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0(\epsilon) : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0\,.$$

(Für hinreichend großen Index weichen die Folgenglieder untereinander beliebig wenig ab.)

c) Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge konvergiert.
Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergiert.

Beweis: Wir zeigen nur (a):
Sei $\epsilon > 0$. Dann existieren $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, so dass:

$$a_n \in U_\epsilon(b) \quad \forall n \geq n_0\,,$$

$$c_n \in U_\epsilon(b) \quad \forall n \geq n_1\,,$$

$$\Rightarrow \qquad b - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < b + \epsilon \quad \forall n \geq n_2 := \max(n_0, n_1)\,.$$

Also ist $b_n \in U_\epsilon(b)\ \forall n \geq n_2$, d.h. $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

□

[1]nach dem französischen Mathematiker Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

10.12 Beispiel

Die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und von unten durch 0 beschränkt. Somit ist $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ konvergent.

Man kann zeigen:

10.13 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt:

a) Falls $a_n \leq b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, so ist $a \leq b$.

b) Falls $a_n < b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, so ist $a \leq b$.
($a < b$ ist im allgemeinen falsch!)

c) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$.

d) $\lim_{n\to\infty}(a_n * b_n) = (a * b)$.

e) Ist $b \neq 0$, dann existiert n_0 mit $b_n \neq 0 \; \forall n \geq n_0$.
Dann sind auch $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ und $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ konvergent mit Limes $\frac{1}{b}$ bzw. $\frac{a}{b}$.

f) $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $|a|$.

g) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, dann ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a}$.
(Dabei bezeichnet man $\sqrt[m]{a_n}$ die eindeutig bestimmte Zahl $w \geq 0$ mit $w^m = a_n$.)

10.14 Beispiele

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{17}{n} = 17 * \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 17 * 0 = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n} * \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \right) =^{c),d)} \lim_{n\to\infty} 1 * \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \right) =^{e)}$
$\lim_{n\to\infty} 1 * \dfrac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}} = 1 * \dfrac{1}{1+0} = 1$

c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{5n^4 - 2n^2 + 1}{7n^4 + 11n^3 + 1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{7 + \frac{11}{n} + \frac{1}{n^4}} = \dfrac{5 - 0 + 0}{7 + 0 + 0} = \dfrac{5}{7}$

10.15 Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$

Anwendungsbeispiel: Ein Geldbetrag a_0 wird mit einem Jahreszins p jährlich, halbjährlich, vierteljärlich, monatlich, usw. verzinst. Dann ergibt sich nach einem Jahr:

$$a_1 = a_0 * (1+p) \text{ bei jährlicher Verzinsung}$$

$$a_2 = a_0 * \left(1+\frac{p}{2}\right)^2 \text{ bei halbjährlicher Verzinsung}$$

$$a_4 = a_0 * \left(1+\frac{p}{4}\right)^4 \text{ bei vierteljährlicher Verzinsung}$$

$$a_{12} = a_0 * \left(1+\frac{p}{12}\right)^{12} \text{ bei monatlicher Verzinsung}$$

Konvergiert die Folge $a_n = (1+\frac{p}{n})^n$ für $n \to \infty$?

Man kann zeigen:

- (a_n) ist monoton wachsend
- (a_n) ist nach oben beschränkt

Somit konvergiert (a_n) nach Satz 10.11.c). Für $p=1$ ist der Grenzwert die Euler'sche Zahl e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,7182\ldots,$$

und für allgemeines p gilt: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = e^p$.

Kapitel 11

LANDAU - SYMBOLE

11.1 Motivation

- Wir suchen kompakte Notation für die Aufwandsabschätzung von Algorithmen.
- Algorithmus soll von der Problemgrösse abhängen, die durch eine Zahl n beschrieben wird.
  (Bsp.: n = Zahl der zu sortierenden Objekte einer Liste.)
- Laufzeit ist Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ mit $f(n) = a_n$, d.h. eine Folge.
- Meist ist a_n monoton wachsend und unbeschränkt, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
- Interessant ist wie schnell a_n gegen ∞ strebt. Hierzu vergleicht man (a_n) mit Prototypen von anderen Folgen.

11.2 Definition $O(n)$, $o(n)$

Eine Folge $A = (a_n)$ ist "Groß O" von $B = (b_n)$, wenn der Quotient $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ beschränkt ist.

Die Folge A ist "Klein O" von B, wenn $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ eine Nullfolge ist.

Wir schreiben $A = O(B)$ bzw. $A = o(B)$ und nennen O und o Landau-Symbole [1] .

11.3 Beispiele

a) $2n^2 + 3n + 4 = O(n^2)$, denn

$$\frac{2n^2 + 3n + 4}{n^2} = \frac{n^2(2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2})}{n^2} = 2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}\,.$$

[1] benannt nach dem deutschen Zahlentheoretiker Edmund Landau (1877-1938)

Dies ist eine konvergente Folge und somit beschränkt.

b) $2n^2 + 3n + 4$ ist auch $o(n^3)$, denn

$$\frac{2n^2 + 3n + 4}{n^3} = \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty\,.$$

11.4 Mehrdeutigkeit

Die Angaben $A = O(B)$ oder $A = o(B)$ sind nicht eindeutig:
Für $A = (n + 2)$ sind z.B. $A = O(n^2), A = O(n), A = O(\frac{n}{2})$ korrekte Aussagen.

Generell gilt:

- Konstante Faktoren ändern die Ordnung nicht:
  $O(B) = O(cB) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Terme niedriger Ordnung sind unwichtig:
  Z.B. haben $n^2 + 3n + 4$ und $n^2 + 17n$ die gleiche Ordnung $O(n^2)$.

Man zeigt leicht:

11.5 Satz (Rechenregeln für Landau-Symbole)

Für reelle Zahlenfolgen A, B, C gelten folgende Regeln:

a) $A = O(A)$

b) $c * O(A) = O(A)$
$c * o(A) = o(A)\ , c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $O(A) + O(A) = O(A)$
$o(A) + o(A) = o(A)$

d) $O(A) * O(B) = O(A * B)$
$o(A) * o(B) = o(A * B)$

e) $A * O(B) = O(A * B)$
$A * o(B) = o(A * B)$

f) Transitivität:
$A = O(B), B = O(C) \ \Rightarrow\ A = O(C)$
$A = o(B), B = o(C) \ \Rightarrow A\ = o(C)$

11.6 Vergleichbarkeit von Folgen

Nicht alle Folgen sind vergleichbar: Betrachte z.B. $A = (a_n)$, $B = (b_n)$ mit

$$a_n = \begin{cases} n^2, & n \text{ gerade} \\ n, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} n, & n \text{ gerade} \\ n^2, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für gerades n sieht man, dass $A \neq O(B)$, und für ungerades n sieht man, dass $B \neq O(A)$.

11.7 Definition $O(A) = O(B)$, $O(A) < O(B)$

Wir sagen:

$$O(A) = O(B) \;:\Leftrightarrow\; A = O(B) \wedge B = O(A)$$

$$O(A) < O(B) \;:\Leftrightarrow\; A = O(B) \wedge B \neq O(A)$$

11.8 Häufig verwendete Prototypen von Vergleichsfunktionen

Ordnung	Laufzeitverhalten
$O(1)$	konstant
$O(\log_a n), a > 1$	logarithmisch
$O(n)$	linear
$O(n * \log_a n), a > 1$	n log n
$O(n^2)$	quadratisch
$O(n^3)$	kubisch
$O(n^k)$	polynomial
$O(a^n), a > 1$	exponentiell

Häufig ist $a = 2$. Die Wahl der Basis a ist jedoch unwichtig, da sich Logarithmen zu unterschiedlichen Basen nur um einen festen Faktor unterscheiden:

$$\log_a n = \frac{\mathrm{ld}\, n}{\mathrm{ld}\, a} \text{ mit } \mathrm{ld} := \log_2 \,.$$

11.9 Vergleich von Ordnungen

$$O(1) < O(\log\, n) < O(n) < O(n * \log\, n) < O(n^2) < \underbrace{O(n^k)}_{k \geq 3} < ... < O(2^n) < O(3^n) < ...$$

Tabelle mit konkreten Werten von n:

n	ld n	n ln n	n^2	n^3	2^n
10	3,32	33,22	100	1000	1024
100	6,64	664,4	10000	10^6	$1,27 * 10^{30}$
1000	9,97	9966	10^6	10^9	10^{301}
10000	13,29	132877	10^8	10^{12}	10^{3010}

Für große Problemgrößen n sollte man daher nicht auf Fortschritte auf dem Rechnersektor hoffen, sondern einen Algorithmus suchen, der eine niedrigere Ordnung besitzt.

Kapitel 12

REIHEN

12.1 Motivation

- Reihen sind spezielle Folgen, die z.B. als Potenzreihen wichtige Anwendungen in der Approximation klassischer Funktionen, wie Sinus und Cosinus, Logarithmus oder Exponentialfunktion haben.

- In der Informatik haben sie zudem Bedeutung in der Zahlendarstellung.

12.2 Definition Reihen, Partialsumme

Sei (a_n) eine Folge. Bildet man hieraus die neue Folge (s_n) mit

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

so nennt man (s_n) eine Reihe und schreibt hierfür $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
Die Glieder s_n heißen Partialsummen der Reihe.
Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so wird ihr Grenzwert

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ebenfalls mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

Bemerkung: Folgen und Reihen unterscheiden sich also lediglich dadurch, dass man bei Reihen versucht, Konvergenzaussagen nicht in Abhängigkeit von s_n, sondern von den Summanden a_k zu gewinnen.

Wann konvergiert eine Reihe?

12.3 Satz (Konvergenzkriterien für Reihen)

a) Cauchy-Kriterium (vgl. 10.11 b))
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent
$\Leftrightarrow$ Es gibt zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0(\epsilon) \text{ mit } m \geq n\,.$$

b) Notwendige Konvergenzbedingung
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent $\Rightarrow$ (a_k) ist Nullfolge.
(Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch!)

c) Linearität
Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergieren, so konvergieren auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm b_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} c * a_k \quad \forall c \in \mathbb{R}\,.$$

Es gelten

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c * a_k = c * \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,.$$

d) Leibniz-Kriterium [1]
Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge nichtnegativer Zahlen a_k. Dann konvergieren die alternierenden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k\,.$$

Ihr Grenzwert liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Partialsummen.

Beweis:

a) Folgt direkt aus Cauchy-Kriterium für Folgen (10.11(b)).

b) Folgt aus (a) mit $m = n$.

c) Folgt aus den Rechenregeln für Folgen (10.13).

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), letzter Universalgelehrter: Philosoph und Wissenschaftler, Mathematiker, Diplomat, Physiker, Historiker, Politiker, Bibliothekar und Doktor des weltlichen und des Kirchenrechts. Nach ihm wurden auch die Leibniz-Kekse benannt (die er nicht erfand)

d) Betrachte (s_n) mit $s_n := \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$. Dann gilt:

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0\,,$$

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0\,,$$

d.h. $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, (*)
$(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. (**)
Wegen

$$s_{2n} = s_{2n-1} + \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0} > s_{2n-1} \geq^{(**)} s_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ist $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, nach unten beschränkt.
Nach 10.11.(c) existiert somit $s := \lim_{n\to\infty}(s_{2n})$.
Analog zeigt man, dass $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist und $s' = \lim_{n\to\infty}(s_{2n-1})$ existiert.
Wegen

$$\begin{aligned} s - s' &= \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k a_k \\ &= \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0 \end{aligned}$$

haben (s_{2n}) und (s_{2n-1}) den selben Grenzwert, d.h. (s_n) konvergiert gegen s. Ferner gilt:

$$s_{2n-1} \leq^{(**)} s \leq^{(*)} s_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Der Beweis für $s_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$ verläuft analog.

□

Bemerkung: Das Cauchy-Kriterium impliziert, dass das Konvergenzverhalten einer Reihe sich nicht ändert, wenn man endlich viele Summanden abändert. In diesem Fall ändert sich höchstens der Grenzwert.

12.4 Beispiele

a) Geometrische Reihe [2]
$\sum_{k=0}^\infty q^k = 1 + q + q^2 + \ldots$ (Hier ist es sinnvoll, mit $k = 0$ zu beginnen!)

[2] Namensgebung nach der geometrischen Folge; 'geometrisch' deshalb, weil aufeinanderfolgende Glieder stets dasselbe Verhältnis haben

Wie sehen die Partialsummen aus?

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$
$$q * s_n = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$$
$$\Rightarrow \ (1-q) * s_n = 1 - q^{n+1}$$
$$\Rightarrow \text{ Für } q \neq 1: \ s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

$$\text{Für } |q| < 1 \text{ ist daher } \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}\,,$$

d.h. die geometrische Reihe konvergiert.

Für $|q| \geq 1$ ist $(a_k) = (q^k)$ keine Nullfolge. Nach 12.3b) kann $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ in diesem Fall nicht konvergieren.

b) Harmonische Reihe [3]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Diese Reihe ist divergent, denn

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{m} = \frac{m-n+1}{m} \to 1 \ \text{ für } \ m \to \infty\,.$$

Somit ist für $0 < \epsilon < 1$ das Cauchy-Kriterium verletzt.

c) Alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, da $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Wegen $s_1 = 1$ und $s_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ gilt die Einschließung

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \leq 1\,.$$

(Man kann zeigen, dass der Grenzwert $\ln 2 \approx 0.69$ beträgt.)

Bei endlichen Summen darf man die Reihenfolge der Summation vertauschen. Bei unendlichen Summen (Reihen) ist dies nur in besonderen Fällen erlaubt.

Hierzu benötigen wir den Begriff der absolut konvergenten Reihe.

[3] Namensgebung nach harmonischer Folge; 'harmonisch' deshalb, weil dort jedes Glied das harmonische Mittel (ein spezieller Mittelwert) seiner Nachbarn ist

12.5 Definition Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

12.6 Zusammenhang zwischen Konvergenz und absoluter Konvergenz

a) Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Beweis: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
Nach dem Cauchy-Kriterium für $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\underbrace{\left|\sum_{k=n}^{m} |a_k|\right|}_{=\sum_{k=n}^{m} |a_k|} < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0(\epsilon) \text{ mit } m \geq n\,.$$

Wegen $|\sum_{k=n}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|$ gilt:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0(\epsilon) \text{ mit } m \geq n\,,$$

d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ erfüllt das Cauchy-Kriterium 12.3.(a) und ist somit konvergent.

b) Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe (12.4(c)) konvergiert. Sie konvergiert jedoch nicht absolut, da die harmonische Reihe (12.4.(b)) divergiert.

Man kann folgende Kriterien für absolute Konvergenz zeigen:

12.7 Satz (Kriterien für absolute Konvergenz)

a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent $\Leftrightarrow$ Die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

b) Majorantenkriterium

Sei $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq k_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.
($\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ heißt dann Majorante für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.)

c) Quotientenkriterium

Sei $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0, k_0 \in \mathbb{N}$. Gilt für alle $k \geq k_0$ die Ungleichung $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ mit einem festen $q < 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

d) Wurzelkriterium
Gilt für alle $k \geq k_0$ die Ungleichung $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ mit einem festen $q < 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

12.8 Bemerkungen

a) Um nach Quotienten- bzw. Wurzelkriterium absolute Konvergenz zu zeigen, genügt es, wenn gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \text{ bzw. } \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1\,.$$

b) Gilt $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ oder $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

c) Für $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$ oder $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ ist kein Schluss auf das Konvergenzverhalten möglich.

12.9 Beispiele zu Satz 12.7

a) Sei $k! := 1 * 2 * 3 * ... * (k-1) * k$. (Fakultät von k.)
Für jede reelle Zahl z konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{z^k}{k!}}_{a_k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

absolut, denn für $z \neq 0$ gilt:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{z^{k+1}k!}{z^k(k+1)!}\right| = \frac{|z|}{k+1} \to 0 \text{ für } k \to \infty\,.$$

Somit ist das Quotientenkriterium erfüllt.
Für $z = 0$ liefert die Reihe den Wert 1.
Bemerkung: Es gilt übrigens $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \; \forall z \in \mathbb{R}$ (e: Euler'sche Zahl, vgl 10.15).

b) Betrachte $\sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(\ln\, k)^k}}_{a_k}$.

Wegen $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\ln k} \to 0$ für $k \to \infty$ konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium absolut.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert absolut und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \text{ für } n \to \infty\,.$$

Die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also beschränkt und konvergiert somit absolut gemäß 12.7(a).

d) Für jedes $r \in \mathbb{R}, r \geq 2$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ absolut konvergent:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} <^{c)} 1 + 1 = 2\,.$$

Aus der Beschränktheit $0 \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{k^r}\right| < 2$ folgt nach 12.7(a) die absolute Konvergenz.

Absolut konvergente Reihen haben den Vorteil, dass man Sie umordnen darf. Man kann zeigen:

12.10 Satz (Umordnungssatz)

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und ist $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Umordnung (bijektive Abbildung), so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}\,.$$

Bemerkung: Für konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen gilt dies nicht.

Absolut konvergente Reihen lassen sich auch gut miteinander multiplizieren. Mit Hilfe des Umordnungssatzes kann man zeigen:

12.11 Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent (der Einfachheit halber beginnen wir hier mit 0). Ferner sei $c_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$.

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut, und es gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\,.$$

Bemerkung: Das Cauchy-Produkt summiert also folgendermaßen auf:

$$\begin{gathered}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l\right) = a_0 b_0 \\ +(a_0 b_1 + a_1 b_0) \\ +(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \\ +(a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) \\ +...\end{gathered}$$

Kapitel 13

POTENZREIHEN

13.1 Motivation

Potenzreihen sind wichtig bei der Darstellung und Approximation von Funktionen (Tailor-Reihen [1]; erzeugende Funktionen).

13.2 Definition Potenzreihe, Entwicklungspunkt

Eine Reihe der Form

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x - x_0)^i$$

mit $x_0, x \in \mathbb{R}$ heißt Potenzreihe, x_0 heißt Entwicklungspunkt. Im folgenden sei stets $x_0 = 0$.

13.3 Beispiele

1) Die Exponentialreihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$. Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen e^x.

2) Die geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$.
   Sie stellt für $|x| < 1$ eine Funktion dar: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \dfrac{1}{1-x}$. Sie konvergiert absolut für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| \geq 1$.

Es scheint eine "Grenze" zu geben, die die Bereiche trennt, in denen eine Reihe divergiert oder konvergiert.

[1] nach dem englischen Mathematiker Brook Taylor (1685-1731)

13.4 Satz

Für eine Potenzreihe, die nicht für alle reellen Zahlen konvergiert, gibt es ein $R \geq 0$ derart, dass sie

- für $|x| < R$ absolut konvergiert und
- für $|x| > R$ divergiert.

Beweis: Siehe z.B. Hartmann, Seite 303.

Bemerkung: Für $x = \pm R$ lässt sich keine allgemeine Aussage treffen.

Definition: Die Zahl R heißt Konvergenzradius, und $]-R, R[$ heißt Konvergenzintervall.

Man legt fest:

- $R = \infty$: Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $x \in R$.
- $R = 0$: Die Potenzreihe konvergiert nur für $x = 0$.

13.5 Bemerkung

Man darf in eine Potenzreihe auch komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ einsetzen; Satz 13.4 gilt analog. Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ ist in der komplexen Zahlenebene eine offene Kreisscheibe.

13.6 Satz (Berechnung des Konvergenzradius)

a) (D'Alembert'sches Kriterium) [2]
Sind für eine Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ alle a_i ab einem gewissen Index ungleich 0 und existiert der Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{, so ist } R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$
(Insbesondere gilt dies auch, wenn der Grenzwert ∞ ist.)

b) (Satz von Cauchy-Hadamard) [3]
Besitzt die Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ den Konvergenzradius R und konvergiert die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ so gilt:
$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

(Das gilt auch, wenn der Grenzwert 0 oder ∞ ist. In diesem Fall muss $\frac{1}{0}$ als ∞ und $\frac{1}{\infty}$ als 0 interpretiert werden.)

[2] nach dem französischen Mathematiker, Physiker und Philosoph Jean-Baptiste le Rond (1717-1783), genannt d'Alembert

[3] nach Cauchy sowie dem französischen Mathematiker Jacques Hadamard (1865-1963)

13.7 Beispiele

a) Geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ (alle $a_i = 1$):
$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1 \Rightarrow R = 1$ nach 13.6(a). Für $x = \pm 1$ liegt Divergenz vor.

b) Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}$ hat den Konvergenzradius $R = 1$, denn es gilt
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$ nach 13.6 b).
$x = 1$: Divergenz (harmonische Reihe);
$x = -1$: Konvergenz (alternierende harmonische Reihe).

Kapitel 14

DARSTELLUNG VON ZAHLEN IN ZAHLSYSTEMEN

14.1 Motivation

- Zahlsysteme ermöglichen effiziente Darstellung natürlicher (und auch reeller) Zahlen mit einem endlichen Zahlenvorrat.
- Die Wahl von 10 als Basis ist (mathematisch gesehen) willkürlich.

Für Anwendungen in der Informatik sind Darstellungen z.B. im Hexadezimalsystem (Basis 16), besonders aber im Dualsystem (Basis 2) [1] wichtig.

14.2 Satz (Darstellung natürlicher Zahlen in Zahlsystemen)

Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Dann lässt sich jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eindeutig in der Form

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + ... + a_0 b^0$$

mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $a_i \in \{0, 1, ..., b-1\}$, $a_m \neq 0$ darstellen.
Anstelle von $a_m b^m + .. + a_0 b^0$ schreibt man

$$(a_m a_{m-1} ... a_0)_b\,.$$

Beweis: Hartmann, Seite 48.

14.3 Definition Ziffern, System zur Basis b

Die möglichen Koeffizienten $0, ..., b-1$ nennt man Ziffern des Systems zur Basis b (b-adisches System).

[1] eingeführt von Gottfried Wilhelm Leibniz im 17. Jahrhundert

14.4 Beispiel

$b = 2$:
$(256)_{10} = 2 * 10^2 + 5 * 10^1 + 6 * 10^0$
$= 1 * 2^8 + 0 * 2^7 + 0 * 2^6 + ... + 0 * 2^0 = (100000000)_2$.

Wie findet man die Ziffern für die Zahldarstellung?

Durch wiederholte Division mit Rest (vgl 6.2).

$$\begin{array}{rcccl}
(a_m b^m + ... + a_0 b^0) & : & \text{b} & = & \underbrace{a_{m-1} b^{m-1} + ... + a_1 b^0}_{(*)} \quad \text{Rest } a_0 \\
(*)\ (a_m b^{m-1} + ... + a_1 b^0) & : & \text{b} & = & \underbrace{a_m b^{m-2} + ... + a_2 b^0}_{(**)} \quad \text{Rest } a_1 \\
\vdots & : & \text{b} & = & \vdots \qquad\qquad \vdots \\
(**)\ (a_m b^0) & : & \text{b} & = & 0 \qquad \text{Rest } a_m
\end{array}$$

14.5 Definition b-adischer Bruch

Es sei $z \in \mathbb{Z}$, und für alle $n \geq z$ sei $a_n \in \{0, ..., b-1\}$. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=z}^{\infty} \frac{a_n}{b^n} \qquad \text{(Reihe mit negativen Indizes)}$$

mit $a_z \neq 0$ heißt b-adischer Bruch.
Man schreibt dafür $(a_z, a_{z+1} \ldots\ E - z)_b$.
Man spricht von:

- Einem endlichen b-adischen Bruch und schreibt $(a_z, a_{z+1} \ldots a_n\, E - z)_b$, falls $a_i = 0$ für alle $i > n$.

- Einem periodischen b-adischen Bruch und schreibt

  $$(a_z, a_{z+1} \ldots a_n \overline{p_1 ... p_r} E - z)_b := (a_z, a_{z+1} \ldots a_n p_1 ... p_r p_1 ... p_r \ldots E - z)_b \,,$$

  falls eine Folge $p_1 ... p_r$ von Ziffern sich ständig wiederholt.

  Alternative Schreibweisen:

  $$\begin{array}{ll}
  (a_z a_{z+1} ... a_0, a_1 a_2 \ldots)_b & \text{für } z \leq 0\,, \\
  (0, \underbrace{0...0}_{z-1 \text{ Nullen}}, a_z a_{z+1} ...)_b & \text{für } z > 0\,.
  \end{array}$$

14.6 Beispiel

$$(4,625E1)_7 = (46,25)_7 = 4 * 7^1 + 6 * 7^0 + \frac{2}{7^1} + \frac{5}{7^2} = \frac{1685}{49}\,.$$

14.7 Satz (Darstellung reeller Zahlen in Zahlsystemen)

Es sei $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$. Dann gilt:

a) Jeder b-adische Bruch konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{R}, x > 0$.

b) Zu jedem $x \in \mathbb{R}, x > 0$ gibt es einen b-adischen Bruch, der gegen x konvergiert.

c) Jeder periodische b-adische Bruch konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{Q}, x > 0$.

d) Zu jedem $x \in \mathbb{Q}, x > 0$, gibt es einen periodischen oder endlichen b-adischen Bruch, der gegen x konvergiert.

Beweis:

- Zu a),b),c): z.B. Hartmann, Seite 251.
- Zu d): O.B.d.A. sei $x = \frac{p}{q} < 1$, $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$. Wir suchen $a_1, a_2 ...$ mit $\frac{p}{q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$.
  - Berechnung der a_i durch folgenden Divisionsalgorithmus für natürliche Zahlen:

$$\begin{array}{ccccc}
(b * p) & : & \text{q} & = & a_1 \text{ Rest } r_1 & 0 \leq r_1 < q \\
(b * r_1) & : & \text{q} & = & a_2 \text{ Rest } r_2 & 0 \leq r_2 < q \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
(b * r_n) & : & \text{q} & = & a_{n+1} \text{ Rest } r_{n+1} & 0 \leq r_{n+1} < q \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}$$

- Hierbei ist stets $a_i < b_i$:
  Wäre nämlich $a_i \geq b$ für $i > 1$, so $b * r_{i-1} = q * a_i + r_i \geq q * b + 0 \Rightarrow r_i - 1 \geq q$ im Widerspruch zu $0 \leq r_{i-1} < q$ (für $i > 1$)
  Für $i = 1$ ergibt sich analog ein Widerspruch zu $p < q$.
- Die a_i sind die gesuchten Koeffizienten, denn der Divisionsalgorithmus ist

$$p = \frac{a_1}{b} * q + \frac{r_1}{b}$$

$$r_1 = \frac{a_2}{b} * q + \frac{r_2}{b} \Rightarrow \text{Einsetzen} \quad p = \left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2}\right) * q + \frac{r_2}{b^2}$$

$$\vdots$$

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{b} * q + \frac{r_{n+1}}{b} \;\Rightarrow\; p = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{b^k}\right) * q + \frac{r_{n+1}}{b^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r_{n+1}}{b^{n+1}q} \;=\; \frac{p}{q} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{b^k}$$

Die linke Seite konvergiert gegen 0 für $n \to \infty$. Also konvergiert $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{b^k}$ gegen $\frac{p}{q}$ für $n \to \infty$.

Wann endet der Algorithmus?

- Gilt $r_n = 0$, so $\frac{p}{q} = (0, a_1 ... a_n)_b \to$ endlicher b-adischer Bruch.
- Gilt $r_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so muss sich ein Rest wiederholen. Damit wiederholen sich ab dort alle Divisionen und Reste:
  Ist nämlich z.B. $r_n = r_s$ für ein $n > s$, so folgt

  $$a_{n+1} = a_{s+1} \text{ und } r_{n+1} = r_{s+1}\;,\ \text{usw.}$$

  $$\text{Also: } \frac{p}{q} = (0, a_1 ... a_s \overline{a_{s+1} ... a_n})_b \;\to\; \text{perdiodischer } b\text{-adischer Bruch.}$$

□

14.8 Bemerkungen

1) Ein periodischer b-adischer Bruch der Form (**) $(a_z, a_{z+1} ... a_n \overline{p}\, E - z)_b$ mit $p = b-1$ und $a_n < b - 1$ stellt dieselbe Zahl dar wie der endliche b-adische Bruch

   $$(a_z, a_{z+1} \ldots a'_n \, E - z) \;\text{ mit } a'_n = a_n + 1\,.$$

   Z.B. sind $(0, \overline{9})_{10} = 1$, $(23, 482\overline{9})_{10} = (23, 483)_{10}$.
   Es ist daher üblich, den Fall (**) als Zahldarstellung auszuschließen, um zu jeder reellen Zahl eine eindeutige Darstellung zu haben.

2) Die Darstellung aus Def. 14.5 zur Basis $b = 2$ entspricht der Speicherung von Zahlen im Computer. Die führende Ziffer ist hier stets die 1, also

   $$(1, a_{z+1} ... a_{z+m} \, E - z)_2 \;\text{ (nur endlich viele Ziffern).}$$

   Die endliche Folge der $a_i \in \{0, 1\}, z + 1 \leq i \leq z + m$ heißt <u>Mantisse</u>.
   Die sogenannte Gleitkommadarstellung umfasst das Vorzeichen, die Mantisse und den Exponenten:

Vorzeichen	Exponent + Offset	Mantisse
1 bit	e bits	m bits

   Z.B. Datentyp float: $m = 23$, $e = 8$, Offset$= 127$

Kapitel 15

BINOMIALKOEFFIZIENT UND DIE BINOMIALREIHE

15.1 Motivation

Binomialkoeffizienten spielen eine große Rolle:

- In der Kombinatorik, wenn man in einer n-elementigen Menge die Zahl der Teilmengen mit k Elementen sucht.
- Bei der Berechnung von $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$ (binomischer Satz).
- Bei der Potenzreihenentwicklung von $(1+x)^\alpha$ für $|x| < 1$.

15.2 Definition Binomialkoeffizient

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, dann heißt

$$\binom{n}{k} = \left\{\begin{matrix}\text{Anzahl der } k\text{-elementigen Teilmengen} \\ \text{einer } n\text{-elementigen Menge}\end{matrix}\right\}$$

der Binomialkoeffizient n über k.

Bemerkung: Offensichtlich gilt

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{k} = 0 \text{ für } k > n$

Der folgende Satz liefert eine rekursive Beschreibung der Binomialkoeffzienten.

15.3 Satz (Rekursive Beschreibung für Binomialkoeffizienten)

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$, dann gilt:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \text{ oder } k = n \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>Beweis:</u>
Die Aussage ist klar für $k = 0$ oder $k = n$. Sei also $0 < k < n$.
Sei $M = \{x_1, ..., x_n\}$. Die k-elementigen Teilmengen N von M zerfallen in 2 Typen:

1) Mengen N mit $x_n \notin N$. Diese entsprechen den k-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{x_n\}$. Davon gibt es nach Definition 15.2. genau $\binom{n-1}{k}$ Stück.

2) Mengen N mit $x_n \in N$. Sie entspechen in ihrer Anzahl den $(k-1)$-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{x_n\}$. Davon gibt es nach Definition 15.2 genau $\binom{n-1}{k-1}$ Stück.

   Insgesamt gilt daher: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

□

15.4 Pascal'sches Dreieck

Satz 15.3 erlaubt die Berechnung des Binomialkoeffizienten mit Hilfe eines Dreiecks, in dem jeder Koeffizient als Summe der beiden schräg darüber stehenden Koeffizienten berechnet wird:

Pascal'sches Dreieck: [1]

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} = 1 & & & \\ & & \binom{1}{0} = 1 & & \binom{1}{1} = 1 & & \\ & \binom{2}{0} = 1 & & \binom{2}{1} = 2 & & \binom{2}{2} = 1 & \\ \binom{3}{0} = 1 & & \binom{3}{1} = 3 & & \binom{3}{2} = 3 & & \binom{3}{3} = 1 \end{array}$$

Für große n ist diese Rekursionsvorschrift ineffizient. Gibt es eine direkte Formel?

15.5 Satz (Direkte Formel für Binomialkoeffizienten)

Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$. Dann gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

[1] nach dem französischen Mathematiker, Physiker, Literat und Philosoph Blaise Pascal (1623-1662)

Dabei bezeichnet $k! = k * (k-1) * (k-2) * ... * 1$ die Fakultät von k. [2] Man setzt $0! = 1$.

Beweis: Vollständige Induktion über n.

15.6 Beispiel

Wieviele Möglichkeiten gibt es beim Lotto, 6 aus 49 Zahlen auszuwählen?

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{49!}{6! * 43!} = \frac{49 * 48 * 47 * 46 * 45 * 44}{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1} = 13983816\,.$$

Was hat das alles mit Analysis zu tun?

15.7 Satz (Binomialsatz)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,.$$

15.8 Beispiele

a) $(a+b)^2$
$= \binom{2}{0} * a^0 * b^2 + \binom{2}{1} * a^1 * b^1 + \binom{2}{2} * a^2 * b^0$
$= 1 * 1 * b^2 + 2ab + 1 * a^2 * 1$
$= b^2 + 2ab + a^2$

b) $(a+b)^3$
$= \binom{3}{0} * a^0 b^3 + \binom{3}{1} a^1 b^2 + \binom{3}{2} a^2 b^1 + \binom{3}{3} a^3 b^0$
$= 1 * 1 * b^3 + 3ab^2 + 3a^2 b + 1 * a^3 * 1$
$= b^3 + 3ab^2 + 3a^2 b + a^3$

15.9 Beweis des Binomialsatzes

Um den Binomialsatz [3] mit vollständiger Induktion zu beweisen, verwenden wir das Prinzip der Indexverschiebung:

[2] Die Bezeichnung und die Notation wurde 1808 von dem elsässischen Mathematiker Christian Kramp (1760-1826) eingeführt

[3] Die Bezeichnung 'binomial' stammt daher, weil die Formel $(a+b)^n$ *zwei Namen* hat: Es ist ein Polynom mit zwei Gliedern a und b. Die dreigliedrige Formel $(a+b+c)$ heißt entsprechend Trinom (als Beispiel zur Verdeutlichung).

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \qquad (*)$$

Induktionsanfang: $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 * 1 * 1 = (a+b)^0 .$$

Induktionsannahme: Für ein festes n aus $\mathbb{N}_0$ gelte: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Induktionsschluss: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n * (a+b) \\
&=^{I.A.} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) * (a+b) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \right) \\
&=^{(*)} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} a^{n+1} b^0 + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^0 b^{n+1} \\
&=^{15.3} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1} a^{n+1} b^0 + \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} .
\end{aligned}$$

□

15.10 Motivation der Binomialreihe

Aus dem Binomialsatz 15.7 folgt für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(1+x)^n = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k .$$

Kann man eine ähnliche Beziehung auch für $(1+x)^\alpha$ gewinnen, wenn α keine natürliche Zahl ist?

Hierzu müssen wir den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} * n * (n-1) * ... * (n-k+1) = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)$$

verallgemeinern zu

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{1}{k!} * \prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0 .$$

Dann kann man zeigen:

15.11 Satz (Binomialreihe)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $-1 < x < 1$. Dann hat $(1+x)^\alpha$ die Potenzreihenentwicklung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k .$$

Bemerkung: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ bricht die Reihe wegen

$$\binom{\alpha}{k} = 0 \quad \forall k > \alpha$$

ab, vgl. 15.2.

15.12 Konvergenz der Binomialreihe

Sei $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ und $x \neq 0$. Dann gilt nach dem Quotientenkriterium 12.7.(c) für

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \;\text{ mit }\; a_k := \binom{\alpha}{k} * x^k \quad :$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(k+1)!} * \prod_{j=0}^{k}(\alpha - j)}{\frac{1}{k!} * \prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)}\right| * |x| = \left|\frac{\alpha - k}{k+1}\right| * |x| .$$

Wegen $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha - k}{k+1}\right| = 1$ ist $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x| < 1$. Damit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent und somit auch konvergent, vgl. 12.6.(a).

15.13 Beispiele

a) $\alpha := -1$

$$\binom{-1}{k} =^{15.10} \frac{1}{k!} * \prod_{j=0}^{k-1}(-1-j)$$

$$= \frac{1}{1 * 2 * ... * k}(-1)(-2)(-3) * .. * (-k)$$

$$= (-1)^k$$

$$\Rightarrow (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k \quad \text{für } |x| < 1 .$$

Die geometrische Reihe ist also eine spezielle Binomialreihe.

b) $\alpha := \frac{1}{2}$

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = \underbrace{\frac{1}{0!}}_{1} * \underbrace{\prod_{j=0}^{0-1}\left(\frac{1}{2} - j\right)}_{1} = 1$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{1!} * \prod_{j=0}^{1-1}\left(\frac{1}{2} - j\right) = \frac{1}{2}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2!} * \prod_{j=0}^{2-1}\left(\frac{1}{2} - j\right) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} * x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3) \quad \text{für } |x| < 1 .$$

Kapitel 16

STETIGKEIT

16.1 Motivation

- In technischen Systemen erwartet man häufig, dass sich das Resultat nur wenig ändert, wenn man die Eingabegrößen nur gering variiert. Erst dann werden sie rechnerisch handhabbar (Rundungsfehler!).
- Mathematisch wird dies durch das Konzept der Stetigkeit formalisiert.

16.2 Definition punktweise Konvergenz

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$. Wir sagen, $f(x)$ konvergiert für $x \to \xi$ gegen den Grenzwert η, falls für jede (!) Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq \xi \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \eta\,.$$

In diesem Fall schreiben wir $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.

16.3 Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ hat für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert, denn:
Sei (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Dann konvergiert (x_n^2) gegen ξ^2; vgl. 10.13.(d).

b) Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ 1, & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$
hat in 0 keinen Grenzwert:
Sei (x_n) eine Folge mit $x_n < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.
Für eine Folge (x_n) mit $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ist jedoch $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = 1$.

Die für Folgen bekannten Grenzwertsätze (vgl. 10.13) lassen sich auf Funktionsgrenzwerte übertragen:

16.4 Satz (Grenzwertsätze für Funktionen)

Existieren für die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Grenzwerte im Punkt $\xi \in \mathbb{R}$, so gilt:

a) $\lim_{x\to\xi}(f(x) \pm g(x)) = f(\xi) \pm g(\xi)$

b) $\lim_{x\to\xi}(f(x) * g(x)) = f(\xi) * g(\xi)$

c) $\lim_{x\to\xi}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$, falls $g(\xi) \neq 0$

d) $\lim_{x\to\xi} c * f(x) = x * f(\xi)$

e) $\lim_{x\to\xi} |x| = |\xi|$

16.5 Definition (punktweise) Stetigkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $\xi \in \mathbb{R}$, wenn dort Funktionswert und Grenzwert übereinstimmen:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f\left(\lim_{x\to\xi} x\right) = f(\xi)\,.$$

Ist f in allen Punkten stetig, so heißt f stetig.

Der folgende Satz zeigt, dass kleine Änderungen im Argument einer stetigen Funktion nur zu kleinen Änderungen der Funktionswerte führen. Man kann zeigen:

16.6 Satz ($\epsilon - \delta$-Kriterium der Stetigkeit)

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind äquivalent: [1]

a) f ist stetig in ξ, d.h. $f(\xi) = \lim_{x\to\xi} f(x)$.

b) Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta(\epsilon) > 0$ mit

$$|x - \xi| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(\xi)| < \epsilon\,.$$

[1] das $\epsilon - \delta$-Kriterium wurde von dem deutschen Mathematiker Karl Weierstraß (1815-1897) eingeführt

16.7 Veranschaulichung

Man kann erreichen, dass die Funktionswerte sich beliebig nahe kommen, wenn sich die Argumente nur hinreichend wenig unterscheiden.

“Stetige Funktionen kann man zeichnen, ohne abzusetzen.”

16.8 Bemerkungen

a) Satz 16.4 impliziert, dass für in ξ stetige Funktionen $f(x)$, $g(x)$ auch die Funktionen $f(x) \pm g(x)$, $f(x) * g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (falls $g(\xi) \neq 0$) und $c * f(x)$ stetig sind. Ebenso ist die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ stetig.

b) Die Komposition (Verknüpfung) stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig. Denn:
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$
$\Rightarrow \lim_{x_n\to\xi} f(x_n) = f(\xi)$, da f stetig
$\Rightarrow \lim_{x_n\to\xi} g(f(x_n)) = g(f(\xi))$, da g stetig. $\square$

c) Die Grenzwert -und Stetigkeitsbegriffe sind sinngemäß auch auf Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ übertragbar, wenn der Definitionsbereich eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. In diesem Fall müssen die betrachteten Folgen (x_n) in D liegen.

16.9 Beispiel

$f(x) = 5x^3 - 7x + 12$ ist stetig, denn

$g_1(x) = 12$ ist stetig,

$g_2(x) = -7x$ ist stetig,

$g_3(x) = 5x^3$ ist stetig,

$f(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$.

16.10 Satz (Eigenschaften stetiger Funktionen)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

a) Nullstellensatz
Ist $f(a) * f(b) < 0$, so existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = 0$.

b) Zwischenwertsatz
Zu jedem c mit $f(a) < c < f(b)$ existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$.

c) Stetigkeit der Umkehrfunktion
Ist $f(x)$ stetig und streng monoton wachsend auf $[a, b]$, (d.h. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$), so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.

d) Maximum-Minimum-Eigenschaft
Es existieren $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ und $f(x_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$.

Beweis von a): Sei o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $f(a) < f(b)$.
Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtellung (Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$) mit folgenden Eigenschaften:

a) $f(a_n) \leq 0\,,\ f(b_n) \geq 0$,

b) $a \leq a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq b\ \forall n \in \mathbb{N}$,

c) $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$.

Initialisierung: $a_0 := a,\ b_0 := b$

Annahme: Die Intervallschachtelung sei bis zum Index n konstruiert, und erfülle a) bis c).

Sei $c := \frac{a_n+b_n}{2}$.

Ist $f(c) < 0$, setze $a_{n+1} := c,\ b_{n+1} := b$.
Ist $f(c) \geq 0$, setze $a_{n+1} := a_n,\ b_{n+1} := c$.

Dann folgt:

a) $f(a_{n+1}) \leq 0,\ f(b_{n+1}) \geq 0$,

b) $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$,

c) $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) =^{I.A.} \frac{1}{2^{n+1}}(b - a)$.

Nach Konstruktion ist:

- (a_n) monoton wachsend, nach oben beschränkt durch b, und $f(a_n) \leq 0$.
  $\Rightarrow \exists\ \tilde{a}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \tilde{a}$ und $f(\tilde{a}) \leq 0$ (vgl. 10.11, 10.13).

- (b_n) monoton fallend , nach unten beschränkt durch a, und $f(b_n) \geq 0$
  $\Rightarrow \exists\tilde{b}$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \tilde{b}$ und $f(\tilde{b}) \geq 0$.

Wegen $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(b - a) = 0$ ist also $\tilde{b} = \tilde{a} =: \xi$
Wegen $f(\xi) = f(\tilde{a}) \leq 0$ und $f(\xi) = f(\tilde{b}) \geq 0$ ist $f(\xi) = 0$. $\square$

Bemerkung: Dieser konstruktive Beweis beschreibt ein numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung, das Bisektionsverfahren.

16.11 Definition Gleichmäßige Stetigkeit

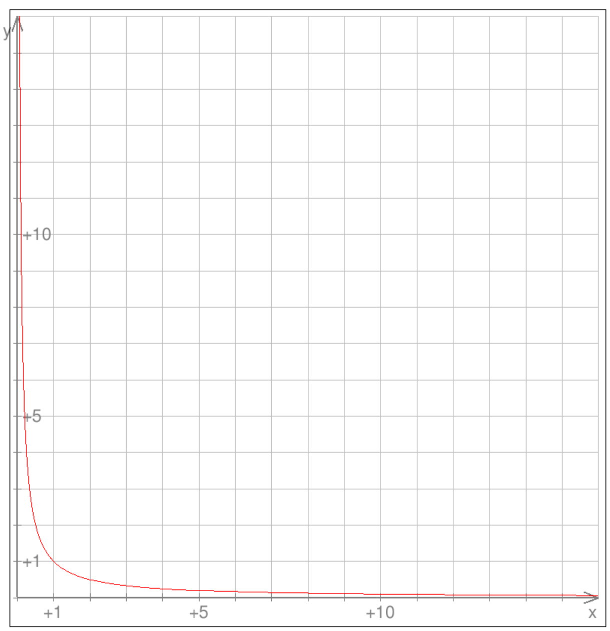
Nach dem $\epsilon - \delta$-Kriterium der Stetigkeit (16.7) ändern stetige Funktionen bei hinreichend kleinen Änderungen des Arguments den Funktionswert nur beliebig wenig. Allerdings kann zu vorgegebenen $\epsilon > 0$ (Funktionswertänderung) das entsprechende $\delta(\epsilon)$ (Argumentänderung) an jeder Stelle ξ anders sein: $\delta = \delta(\epsilon, \xi)$.

Manchmal ist es wichtig, dass δ nur von ϵ abhängt, d.h. dass man in einem ganzen Intervall zu einem ϵ dasselbe $\delta(\epsilon)$ wählen kann.

Definition Gleichmäßige Stetigkeit
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf D, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon)$ existiert mit:

$$|x_1 - x_2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \quad \forall x_1, x_2 \in D\,.$$

16.12 Beispiel



$D = (0, \infty),\ y = f(x) = \frac{1}{x}$.

Zu jedem $\delta > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n*(n+1)} < \delta$.

Es ist aber $|f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n+1})| = |n - (n+1)| = 1$.

Damit gibt es zu $\epsilon < 1$ kein $\delta(\epsilon)$ mit der geforderten Eigenschaft. f ist also nicht gleichmäßig stetig auf D (wohl aber stetig!).

Dieses Beispiel zeigt, dass Stetigkeit nicht immer gleichmäßige Stetigkeit impliziert.

Gibt es Fälle, in denen Stetigkeit auch immer gleichmäßge Stelligkeit nach sich zieht?

Mann kann zeigen:

16.13 Satz (Stetigkeit auf einem abgeschlossenen Intervall)

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.

Bemerkung: Im Bsp. 16.12 war der Definitionsbereich $(0, \infty)$ nicht abgeschlossen.

Kapitel 17

WICHTIGE STETIGE FUNKTIONEN

17.1 Motivation

- Es gibt stetige Funktionen, die so wichtig sind, dass sie einen eigenen Namen tragen.
- Wir wollen diese Funktionen und ihre Umkehrfunktionen genauer betrachten.

17.2 Die Potenzreihen

Potenzfunktionen haben die Struktur $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ definiert man $x^0 = 1$. Wie alle Polynomfunktionen sind Potenzfunktionen stetig.

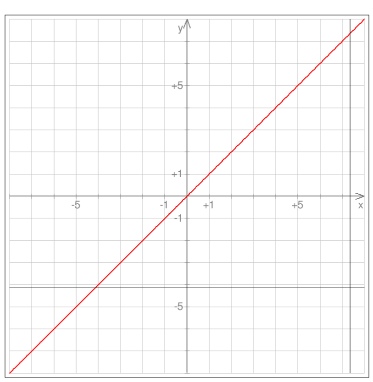
Es gelten die Rechenregeln:

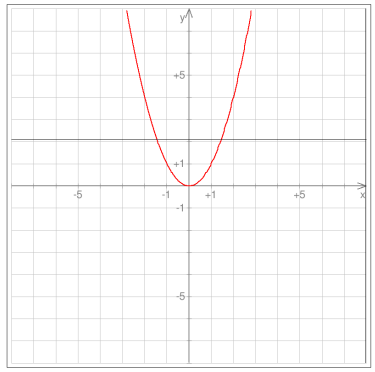
$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$

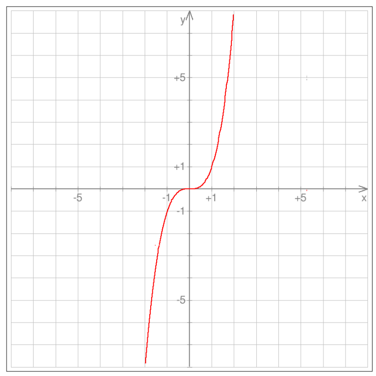
$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

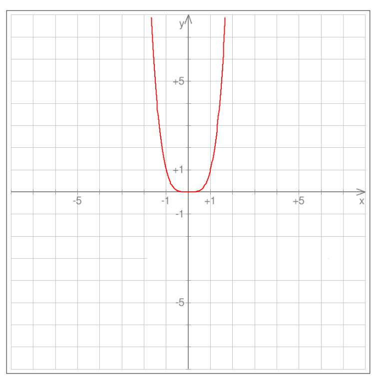
$$(x^n)^m = x^{n*m}$$

Beispiele: $f(x) = x^1, f(x) = x^2, f(x) = x^3, f(x) = x^4$









17.3 Wurzelfunktionen

Schränkt man die Potenzfunktionen auf $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, auf $\mathbb{R}_0^+$ ein, so sind sie dann nicht nur stetig, sondern auch streng monoton wachsend.
Nach 16.9 c) existiert daher eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion.

Die Umkehrfunktion zur n-ten Potenzfunktion ,

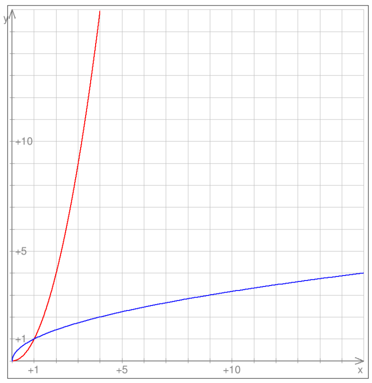
$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \; : \; x \longmapsto x^n$$

nennt man n-te Wurtelfunktion

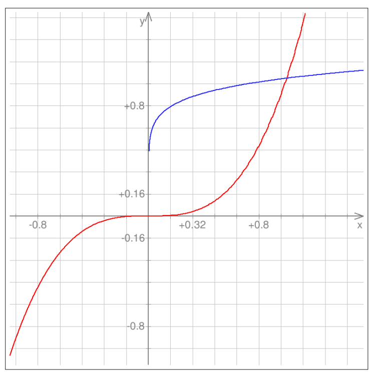
$$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \; : \; x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

für $n = 2$ schreibt man statt $\sqrt[2]{x}$ meist $\sqrt{x}$ [1].

Beispiele:



$f(x) = x^2$ und Umkehrfunktion



$f(x) = x^3$ und Umkehrfunktion

Setzt man $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$, $x^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{x^n}$, $x^{-\frac{n}{m}} := \frac{1}{x^{\frac{n}{m}}}$, so gelten für $x^{\frac{n}{m}}$ die gleichen Rechenregeln wie für die Potenzfunktionen in 17.2

17.4 Exponentialfunktionen

Sei $a > 0$. Dann bezeichnet man mit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}^+$$

die Exponentialfunktion zur Basis a.

Exponentialfunktionen sind stetig. Es gilt die Rechenregel $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (*).

Besonders wichtig ist die Exponentialfunktionen, bei der die Euler'sche Zahl [2]

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,7182$$

[1] Das Symbol $\sqrt{\ }$ ist von einem kleinen 'r' für radizieren (= Wurzel ziehen) abgeleitet und wurde 1525 vom deutschen Mathematiker Christoph Rudolff (1499-1545) eingeführt

[2] nach dem bereits bekannten Leonhard Euler (1707-1783)

als Basis dient (vgl 10.15). Man bezeichnet sie als $\exp(x) = e^x$.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ hat $\exp(z)$ die Potenzreihendarstellung

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + 2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \ldots$$

Sie konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ (vgl 12.9 und 13.3).

$\exp$ wächst schneller als jede Potenz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $e^z = e^x e^{iy}$. Denn $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^i y$

b) $e^x > 0$:

Für $x \geq 0$ ist $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{k!}}_{\geq 0} \geq 0$.

Für $x > 0$ gilt sogar $e^x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1$.

Für $x < 0$ gilt $e^x = \frac{1}{\underbrace{e^{-x}}_{>0}} \geq 0$.

c) $|e^{iy}| = 1$:

Denn $|e^{iy}|^2 = e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{iy} \cdot e^{-iy} = e^{iy-iy} = e^0 = 1$.

d) $|e^z| = e^x$:

Denn $|e^z| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot \underbrace{|e^{iy}|}_{=1} = e^x$.

17.5 Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ (für $a > 1$) ist stetig, streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^+$ bijektiv ab.

Ihre Umkehrfunktion

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

bezeichnet man als Logarithmusfunktion zur Basis a. [3]

Für $a = e$ ergibt sich der natürliche Logarithmus $\ln$.

Es gelten die Rechenregeln

[3] Wichtige Beiträge zur Logarithmusfunktion kamen vom deutschen Theologen und Mathematiker Michael Stifel (1487-1567)

$$\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x^p) = p \cdot \log_a x$$

Logarithmusfunktionen wachsen langsamer als Potenzfunktionen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^n} = 0 \quad (\text{für } a > 1)\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

17.6 Trigonometrische Funktionen

Die Koordinaten eines Punktes P aud dem Einheitskreis werden in Abhängigkeit vom Winkel φ mit

$$y = \sin\varphi$$

$$x = \cos\varphi$$

bezeichnet.

Hierdurch werden die Sinusfunktion [4] $\sin\varphi$ und die Cosinusfunktion [5] $\cos\varphi$ definiert.

Dabei misst man den Winkel φ im Bogenmaß:
Länge des Kreissegments von $\overline{(1,0)\text{ bis zum Punkt } P}$.

Der Umfang des Einheitskreises beträgt 2π. Daher bezeichnet π die Kreiszahl

$$\pi \approx 3,14159\,.$$

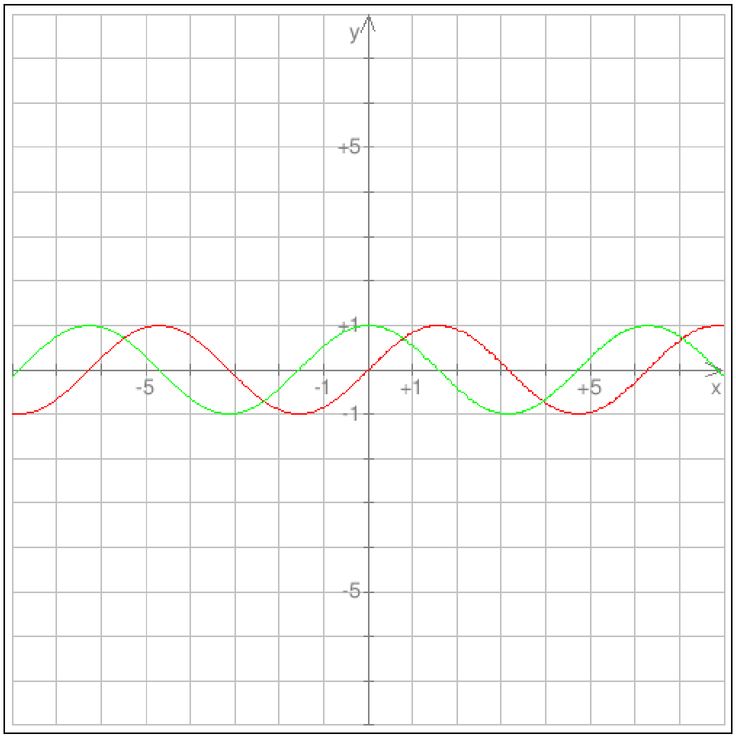
Da das Bogenmaß 2π einem Gradmaß von $360°$ entspricht, gilt:

Gradmaß	Bogenmaß
$0°$	0
$45°$	$\frac{\pi}{4}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$
α	$\frac{\pi}{180°} \cdot \alpha$

Sinus (rot) und Cosinus (grün) haben die folgende Gestalt :

[4] nach der lateinischen Bezeichnung Sinus = 'Bogen, Krümmung, Busen'. Diesen mathematischen Begriff wählte Gerhard von Cremona 1175 als Übersetzung der arabischen Bezeichnung 'gaib' oder 'jiba' ('Tasche' oder 'Kleiderfalte'), entlehnt von dem indischen Sanskrit 'jiva' = 'Bogensehne'

[5] Bezeichung wurde zuerst von Georg von Peuerbach (1423-1461) und Camillus Müller (1436-1476) in trigonometrischen Tabellen (vermutlich für astronomische Berechnungen) verwendet



Es gilt:

a) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

b) $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$
$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$

c) 2π-Periodizität :
$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi$
$\cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi$

d) Additionstheoreme :
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

e) Potenzreihendarstellung :
$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - + ...$
$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - + ...$

Diese Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$. Sinus- und Cosinusfunktion sind stetig, und es gilt die Moivre-Formel [6]:

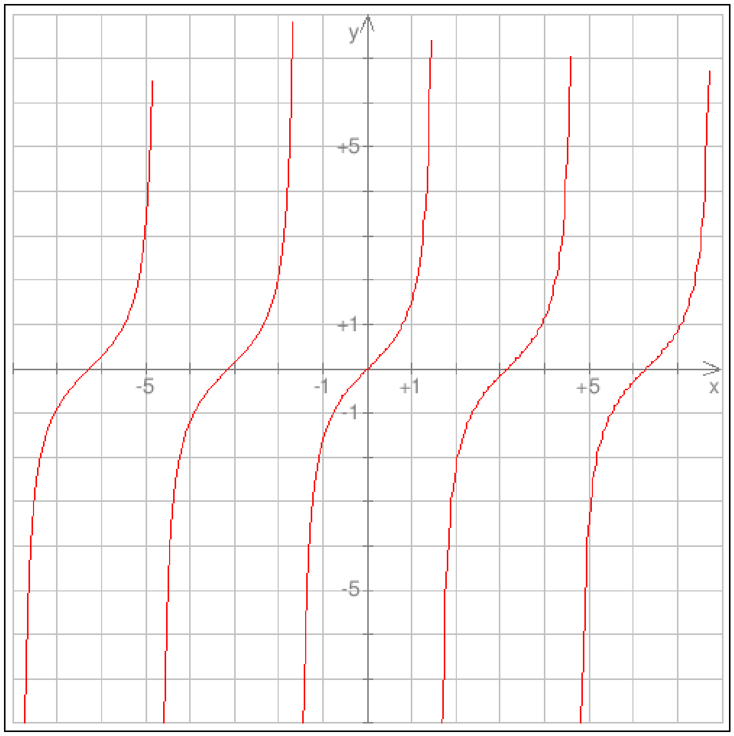
$$e^{ix} = \cos x + i * \sin x\,.$$

[6] benannt nach dem französischen Mathematiker Abraham de Moivre (1667-1754)

Die Tangensfunktion [7] $\tan\varphi$ ist definiert durch

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,.$$

π-Periodizität: $\tan(\varphi+\pi) = \tan\varphi$



Die Tangensfunktion ist definiert und stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

17.7 Trigonometrische Umkehrfunktionen

Wenn wir die trigonometrischen Funktionen auf ein Intervall einschränken, auf dem sie jeweils streng monoton sind, können wir dort Umkehrfunktionen definieren.

a) $\cos$ ist in $[0,\pi]$ streng monoton fallend mit Wertebereich $[-1,1]$. Die Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

heißt Arcus-Cosinus. Sie ist stetig.

b) $\sin$ ist in $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend mit Wertebereich $[-1,1]$. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

heißt Arcus-Sinus. Sie ist stetig.

[7] Bezeichnung 1583 eingeführt vom deutschen Mathematiker Mathematiker Thomas Finck (1561-1656)

c) $\tan$ ist in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend mit Wertebereich $\mathbb{R}$.
Die Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

heißt Arcus-Tangens. Sie ist stetig.

Kapitel 18

DIFFERENZIERBARKEIT

18.1 Motivation

- Wird durch eine Funktion beschrieben, wie sich eine Größe abhängig von einer anderen verändert, so stellt sich die Frage:

  "Wie schnell" ändert sich die abhängige Größe?

  Beschreibt z.B. die Funktion den Ort eines Massenpunktes abhängig von der Zeit (Bewegung entlang eine Linie), so ist dies die Frage nach der Geschwindigkeit (zu jedem Zeitpunkt).

- Betrachtet man eine Funktion in der unmittelbaren Nähe einer Stelle, dann möchte man sie dort durch eine einfachere Funktion möglichst gut annähern, z.B. $f(x)$ durch $f(x) = ax+b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ (affin-lineare Funktion).

Diese und ähnliche Fragen beantwortet die Ableitung, auch Differentiation genannt. [1]

18.2 Definition Differenzierbarkeit in ξ, Ableitung, Differentialquotient

Es sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein $\xi \in \mathbb{R}$ gegeben. $f(x)$ heißt differenzierbar in ξ, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

existiert.

In diesem Fall heißt der Grenzwert Ableitung von $f(x)$ in ξ oder auch Diffentialquotient von $f(x)$ in ξ und wird mit $f'(x)$ oder $\dfrac{df}{dx}(\xi)$ bezeichnet.

[1] Die Differentialrechnung wurde wesentlich durch Isaac Newton (1643-1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz vorangebracht

Ist f in allen $\xi \in \mathbb{R}$ diffbar (diffbar = differenzierbar), so heißt f diffbar.

18.3 Bemerkungen

a) Der Ausdruck $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} =: \frac{\Delta y}{\Delta x}$ heißt Differenzenquotient ($x \neq \xi$). Er gibt die Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(x, f(x)), (\xi, f(\xi))$ des Graphen von f an.

   Für $x \to \xi$ (also $\Delta x \to 0$) geht die Sekantensteigung in die Tangentensteigung [2] im Punkt $(\xi, f(\xi))$ über:
$$f'(x) = \frac{dy}{dx}(\xi) = \frac{df}{dx}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

b) Gleichung der Tangente t an f in $(\xi, f(\xi))$:
$$t(x) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi)\,.$$

c) Schränkt man bei der Grenzwertbildung x auf Werte $\left\{\begin{matrix}\text{größer als } \xi \\ \text{kleiner als } \xi\end{matrix}\right\}$ ein, so erhält man die einseitigen Grenzwerte
$$f'(\xi^+) := \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi},$$
$$f'(\xi^-) := \lim_{x\to\xi^-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi},$$
   die als rechtsseitige ($f'(\xi^+)$) bzw. linksseitige ($f'(\xi^-)$) Ableitung von $f(x)$ in ξ bezeichnet werden.

d) Wie im Falle der Stetigkeit übertragen sich die Begriffe sinngemäß auf Funktionen mit Definitionsbereich $D \subsetneqq \mathbb{R}$.

18.4 Beispiel

Es sei $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

Für beliebige $x, \xi \in \mathbb{R}$ gilt dann
$$f(x) - f(\xi) = x^n - \xi^n = (x-\xi)(x^{n-1} + x^{n-2}\xi + \ldots + \xi^{n-1})\,,$$
$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = n\xi^{n-1}\,.$$
Also ist $f(x) = x^n$ überall in $\mathbb{R}$ diffbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$.

[2] diese 'geometrische Herleitung' der Ableitung war als 'Tangentenproblem' bereits in der Antike bekannt; der mathematisch korrekte, formale Übergang von Sekanten- in Tangentensteigung wurde erst von Cauchy und Weierstraß geleistet

18.5 Ableitung elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
$x^a, x > 0, a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x, x > 0$	$\frac{1}{x}$

Um aus diesen Ableitungen die vieler weiterer Funktionen ”zusammensetzen” zu können, benötigt man die Ableitungsregeln [3]:

18.5.1 Satz (Differenzierbarkeitsregeln)

a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f in ξ auch stetig.

b) Sind $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in ξ diffbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha f + \beta g$ in ξ diffbar mit

$$(\alpha f + \beta g)'(\xi) = \alpha f'(\xi) + \beta g'(\xi)\,.$$

c) Sind $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in ξ diffbar, so ist auch $f \cdot g$ in ξ diffbar mit

$$(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi) \quad \text{(Produktregel).}$$

d) Sind $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in ξ diffbar und $g(\xi) \neq 0$ so ist auch $\frac{f}{g}$ in ξ diffbar mit

$$\frac{f}{g}'(\xi) = \frac{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi)}{(g(\xi))^2} \quad \text{(Quotientenregel).}$$

e) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\xi \in \mathbb{R}$ sowie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\eta = f(\xi) \in \mathbb{R}$ diffbar, so ist auch

$$(g \circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) \quad \text{(Kettenregel).}$$

f) Ist $f[a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und in $\xi \in [a, b]$ diffbar mit $f'(\xi) \neq 0$, so ist auch die inverse Funktion

$$f^{-1}[f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$$

in $\mu = f(\xi)$ diffbar mit

$$(f^{-1})(\mu) = \frac{1}{f'(\xi)}\,.$$

[3] diese stammen von Leonhard Euler (1707-1783)

Bemerkungen: Auch diese Aussagen übertragen sich sinngemäß auf Funktionen mit Definitionsbereichen $D \subsetneqq \mathbb{R}$.
f) gilt auch für streng monoton fallende Funktionen (Definitionsbereich von f^{-1} ist dann $[f(b), f(a)]$).

Beweis: Wir zeigen nur beispielhaft (c), die Produktregel. Die übrigen Beweise verlaufen ähnlich. Auf Grund der Grenzwertsätze (16.4) gilt:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)g(x)-f(\xi)g(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)g(x) - \overbrace{f(\xi)g(x)+f(\xi)g(x)}^{\text{"geschickt 0 addiert"}} - f(\xi)g(\xi)}{x-\xi}$$

$$= \lim_{x\to\xi}\left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}g(x) + f(\xi)\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\right) = f'(\xi)\cdot g(\xi) + f(\xi)\cdot g'(\xi)\,.$$

□

18.6 Beispiele

a) Mit $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ und $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ folgt

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) =^{18.6.c)} \frac{\overbrace{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}^{=1}}{\cos^2 x} \text{ für } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Mit $y = \tan x$ erhält man nach 18.6.f):

$$\frac{d}{dy}(\arctan y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}(\tan x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

c)

$$\frac{d}{dx}(\sin(e^x)) = \cos(e^x)\cdot e^x$$

d)

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)\cdot x}) = e^{(\ln a)\cdot x}\cdot \ln a = a^x \cdot \ln a \quad (a>0)$$

e) Sei $x > 0$.

$$\frac{d}{dx}(x^x) = \frac{d}{dx}(e^{x(\ln x)}) = e^{x\cdot(\ln x)}(1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x}) = x^x\cdot(\ln x + 1)$$

18.7 Bemerkung

Während Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert, gilt die Umkehrung nicht:
$f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ stetig aber nicht diffbar, denn

$$f'(0^+) = 1 \neq -1 = f'(0^-)\,.$$

18.8 Definition zweite, n-te Ableitung, n-mal stetig differenzierbar

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung f'.

Falls $f'(x)$ wiederum differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist, so erhält man die zweite Ableitung $f''(x)$ von $f(x)$. Analog definiert man höhere Ableitungen $f'''(x), f''''(x), ..., f^{(n)}(x)$.

Ist $f(x)$ n-mal differenzierbar auf $\mathbb{R}$, und ist die n-te Ableitung $f^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$, so schreibt man $f \in C^n(\mathbb{R})$ und bezeichnet f als n-mal stetig differenzierbar. Gilt dies für alle $n \in \mathbb{N}$, so schreibt man $f \in C^{infty}(\mathbb{R})$.

Bemerkung: Die Definitionen übertragen sich sinngemäß auf Intervalle $[a, b]$, wobei in a nur rechtsseitige und in b nur linksseitige Ableitungen betrachtet werden.

Ist f auf $[a, b]$ n-mal stetig differenzierbar, so schreibt man $f \in C^n[a, b]$.

Statt $C^0[a, b]$ oder $C^0(\mathbb{R})$ schreibt man meist $C[a, b]$ bzw. $C(\mathbb{R})$ für die stetigen Funktionen auf $[a, b]$ bzw. $\mathbb{R}$.

18.9 Beispiel

$f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 2$

$f'(x) = 15x^2 + 12x$

$f''(x) = 30x + 12$

$f'''(x) = 30$

$f''''(x) = 0$

$f^{(n)} = 0 \; \forall x \geq 4$

dh. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Kapitel 19

MITTELWERTSÄTZE UND REGEL VON L'HOSPITAL

19.1 Motivation

- Für stetige Funktionen gab es wichtige Aussagen wie den Nullstellensatz und den Zwischenwertsatz. Gibt es ähnliche Aussagen für differenzierbare Funktionen?

- Gibt es einen Trick, wie man Grenzwerte der Form "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" einfach berechnen kann?

19.2 Satz (Mittelwertsätze)

a) Satz von Rolle: Sei $f \in C^1[a,b]$ mit $f(a) = f(b)$.
Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

b) (Erster) Mittelwertsatz: Sei $f \in C^1[a,b]$.
Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

c) (Zweiter) Mittelwertsatz: Seien $f, g \in C^1[a,b]$ mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$.
Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Veranschaulichung:

a) Satz von Rolle: Es gibt eine waagerechte Tangente (a,b), falls $f(a) = f(b)$.

b) Mittelwertsatz: Zu jeder Sekante existiert eine parallele Tangente.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen nur b). Für $f \in C^1[a,b]$ erfüllt

$$h(x) := f(x) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$$

die Voraussetzungen des Satzes von Rolle

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) \text{ mit } 0 = h'(\xi) = f'(x) - \frac{1}{b-a} * (f(b) - f(a)),$$

d.h.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

□

Der zweite Mittelwertsatz hat eine interesante Anwendung:

19.3 Satz (L'Hospital'sche Regel)

a) Fall "$\frac{0}{0}$".
Seien f, g stetig diffbar auf $(a,b), \xi \in (a,b), f(\xi) = g(\xi) = 0$, und es gelte $g'(x) \neq 0$ für $x \neq \xi$. Dann folgt

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wenn der rechte Grenzwert existiert.

b) Fall "$\frac{\infty}{\infty}$".
Seien f, g stetig diffbar auf $(a,b) \setminus \xi$ und

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \lim_{x \to \xi} g(x) = \infty,$$

und es gelte

$$g'(x) \neq 0 \text{ für } x \neq \xi.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wenn der rechte Grenzwert existiert.

<u>Beweis:</u> Wir betrachten nur Fall a).
Wegen $f(\xi) = g(\xi) = 0$ und dem zweiten Mittelwertsatz existiert $\eta = \eta(x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} =^{2.\,MWS} \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

mit $\eta(x)$ zwischen x und ξ.
Für $x \to \xi$ gilt daher auch $\eta(x) \to \xi$ und es folgt die Behauptung.

□

19.4 Beispiele

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ hat die Form "$\frac{0}{0}$". Mit L'Hospital ergibt sich:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$ ist vom Typ "$\frac{\infty}{\infty}$". L'Hospital liefert

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

Kapitel 20

DER SATZ VON TAYLOR

20.1 Motivation

- Für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ stellt die Tangente

  $$t(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi)$$

  eine lokale Approximation durch ein Polynom ersten Grades im Punkt ξ dar. Es gilt:

  $$f(\xi) = t(\xi),\ f'(\xi) = t'(\xi)\,.$$

- Ist es möglich, $f(x)$ in ξ durch ein Polynom höheren Grades zu aproximieren, falls f eine höhere Differenzierbarkeitsordnung besitzt?

20.2 Satz (Satz von Taylor)

Sei $\xi \in (a, b)$ und $f \in C^{m+1}[a, b]$.
Dann besitzt $f(x)$ folgende Taylorentwicklung um ξ:

$$f(x) = T_m(x, \xi) + R_m(x, \xi)$$

mit dem Taylorpolynom m-ten Grades

$$T_m(x, \xi) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(x - \xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

und dem Restglied nach Lagrange

$$R_m(x, \xi) = \frac{(x - \xi)^{m+1}}{(m + 1)!} f^{(m+1)}(\xi + \Theta(x - \xi)) \text{ mit } \Theta \in (0, 1)\,.$$

Beweis: Wir betrachten $g(x) := f(x) - T(x)$ mit $T(x) = T_m(x.\xi)$.

Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{r}g(\xi)=f(\xi)-T(\xi)=f(\xi)-f(\xi)=0\\ g'(\xi)=f'(\xi)-T'(\xi)=f'(\xi)-f'(\xi)=0\\ \vdots\\ g^(m)(\xi)=f^{(m)}(\xi)-T^{(m)}(\xi)=f^{(m)}(\xi)-f^{(m)}(\xi)=0\end{array}\right\}(*)$$

(*) Funktion und Taylorpolynom haben gleiche k-te Ableitungen für $k = 0, .., m$.

Nun wenden wir den 2-ten Mittelwertsatz auf $\frac{g(x)}{(x-\xi)^{m+1}}$ an:
$\exists \xi_1$ zwischen ξ und x mit

$$\frac{g(x)}{(x-\xi)^{m+1}} = \frac{g(x)-\overbrace{g(\xi)}^{=0}}{(x-\xi)^{m+1}-(\xi-\xi)^{m+1}} =^{2.\,MWS} \frac{g'(\xi_1)}{(m+1)(\xi_1-\xi)^m}\,.$$

Induktiv folgt:

$$\frac{g(x)}{(x-\xi)^{m+1}} = \frac{g'(\xi_1)}{(m+1)(\xi_1-\xi)^m} = \frac{g''(\xi_2)}{(m+1)m(\xi_2-\xi)^{m-1}} = ... = \frac{g^{(m)}(\xi_m)}{(m+1)!\cdot(\xi_m-\xi)} = \frac{g^{(m+1)}(\xi_{m+1})}{(m+1)!}$$

mit ξ_k zwischen ξ und x für $k = 1, ..., m + 1$.

Mit $g(x) = f(x) - T_m(x, \xi)$ folgt also

$$f(x)-T_m(x,\xi) = \frac{(x-\xi)^{m+1}}{(m+1)!}g^{(m+1)}(\xi_{m+1})\,.$$

Wegen

$$g^{(m+1)}(x) = f^{(m+1)}(x)$$

ist daher

$$f(x) = T_m(x,\xi) + \frac{(x-\xi)^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m+1)}(\xi_{m+1})$$

mit ξ_{m+1} zwischen ξ und x.

□

20.3 Bemerkungen

a) Für $m = 0$ erhält man den ersten Mittelwertsatz.

b) Man kann sogar zeigen, dass $T_m(x, \xi)$ das <u>einzige</u> Polynom vom Grad $\leq m$ ist, das die Approximationsgüte $O((x - \xi)^{m+1})$ besitzt.

c) Neben der Restglieddarstellung nach Lagrange gibt es noch andere Darstellungen des Restgliedes.

20.4 Beispiele

a) Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion um $\xi = 0$:
Aus

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi + \Theta(x-\xi))$$

folgt mit $\xi = 0$ und $\frac{d^k}{dx^k} e^x = e^x$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} e^{\Theta x} \text{ mit } 0 < \Theta < 1\,.$$

Für $0 \le x \le 1$ hat man beispielsweise die Fehlerabschätzung

$$|R_m(x,0)| \le \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} e^{\Theta x} \le \frac{1}{(m+1)!} e\,.$$

Hieraus folgt z.B. mit $m = 10$:

$$|R_{10}(x,0)| \le \frac{1}{11!} e \approx 6.81 \cdot 10^{-8}\,.$$

b) Taylor-Entwicklung der Sinusfunktion um $\xi = 0$:
Mit

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

sowie

$$\sin 0 = 0 \quad \text{und} \quad \cos 0 = 1$$

folgt, dass $T_m(x_0)$ keine geraden Potenzen enthält:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \sin x &= \cos x & \qquad \cos 0 &= 1 \\
\frac{d^2}{dx^2} \sin x &= -\sin x & \qquad -\sin 0 &= 0 \\
\frac{d^3}{dx^3} \sin x &= -\cos x & \qquad -\cos 0 &= -1 \\
\frac{d^4}{dx^4} \sin x &= \sin x & \qquad \sin 0 &= 0 \\
\frac{d^5}{dx^5} \sin x &= \cos x & \qquad \cos 0 &= 1
\end{aligned}$$

usw.

Damit gilt also

$$\sin x = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} (\sin x)|_{x=0} + R_{2n+2}(x,0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x,0),$$

$$R_{2n+2} = (-1)^{n+1} \frac{\cos(\Theta x)}{(2n+3)!} x^{2n+3}, \qquad 0 < \Theta < 1 .$$

Für $|x| \leq 1$ und $n = 3$ folgt beispielsweise

$$|R_8(x,0)| \leq \frac{1}{9!} \approx 2.8 \cdot 10^{-6} .$$

20.5 Definition Taylor-Reihe

Für eine C^∞-Funktion f bezeichnet man die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

als Taylorreihe um den Entwicklungspunkt ξ.

20.6 Bemerkungen

a) Die Taylorreihe muss im Allgemeinen nicht konvergieren.

b) Konvergiert sie, dann muss sie nicht gegen f(x) konvergieren.

c) Ist dies jedoch der Fall, so dass also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

für alle $x \in (a,b)$ gilt, so heißt f reell-analytisch (C^ω-Funktion) auf (a,b).

d) Die Taylorreihe einer C^∞-Funktion f mit Entwicklungspunkt ξ konvergiert in x genau dann gegen $f(x)$, wenn

$$\lim_{m\to\infty} R_m(x,\xi) = 0 .$$

20.7 Beispiele

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist die Taylorreihe zur Exponentialfunktion mit Entwicklungspunkt $\xi = 0$. Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen e^x.

   Allgemein gilt: Existiert eine Potenzreihendarstellung, so ist dies die Taylorreihe.

b) Die Binomialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ ist die Taylorreihe zu $(1+x)^\alpha$ im Entwicklungspunkt $\xi = 0$.

c) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{wenn } (x > 0) \\ 0 & \text{wenn } (x \leq 0) \end{cases}$ ist aus $C^\infty(\mathbb{R})$

   Nachrechnen zeigt, dass $f^{(m)}(0) = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow T_m(x, 0) = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow f(x) = R_m(x, 0)\,.$$

   Für alle $x > 0$ konvergiert die Taylorreihe somit nicht gegen $f(x)$. $f(x)$ ist daher nicht reell-analytisch.

20.8 Satz (Differentiation von Potenzreihen)

Die durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit dem Konvergenzradius r dargestelle Funktion $f(x)$ ist gliedweise differenzierbar. Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ hat denselben Konvergenzradius r und stellt in $(-r, r)$ die Ableitung dar.

20.9 Beispiel

Die Sinusreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $\sin x$. Gliedweise Differentiation ergibt die Cosinus-Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$. Sie konvergiert ebenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$.

Kapitel 21

GEOMETRISCHE BEDEUTUNG DER ABLEITUNG

21.1 Motivation

- Kann man aus den Ableitungen Assagen über den Graphen einer Funktion gewinnen?
- Die Ableitungen liefern sogar sehr viele Aussagen: Monotonie, Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte.
- Diese Aussagen bilden die Grundlage der Kurvendiskussion und sind sehr wichtig bei Optimierungsproblemen.

21.2 Definition (streng monoton wachsend, fallend)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt <u>monoton wachsend</u>, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_2 > x_1$ gilt:

$$f(x_2) \geq f(x_1)\,.$$

f ist <u>streng monoton wachsend</u>, wenn stets $f(x_2) > f(x_1)$ gilt.
Die Eigenschaften <u>monoton fallend</u> bzw. <u>streng monoton fallend</u> sind durch

$$f(x_2) \leq f(x_1) \quad \text{bzw.} \quad f(x_2) < f(x_1)$$

definiert.

21.3 Satz (Monotonie differenzierbarer Funktionen)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar im Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) f ist monoton wachsend (monoton fallend) in I

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0) \quad \text{in } I\,.$$

b) $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend (streng monoton fallend) in I.

Beweis:

a) $'' \Rightarrow''$: Sei f monoton wachsend und diffbar in I, und seien x, $x+h$ in I

$$\Rightarrow f(x+h) - f(x) \geq 0 \ \text{ für } \ h > 0$$

$$f(x+h) - f(x) \leq 0 \ \text{ für } \ h < 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \ \forall h \neq 0 \text{ mit } x, x+h \in I$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \text{ (vgl. Definition der Ableitung).}$$

Analog zeigt man $f'(x) \leq 0$ für f monoton fallend.

$'' \Leftarrow''$ Sei $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$. Seien $h > 0$ und $\xi, \xi+h \in I$. Nach dem ersten MWS existiert $\Theta \in (0,1)$ mit

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = f'(\xi + \Theta h)\,.$$

Wegen $f'(\xi + \Theta h) \geq 0$ und $h > 0$ gilt also somit $f(\xi+h) - f(\xi) \geq 0$, d.h. f ist monoton wachsend.

b) wie (a) "$\Leftarrow$", jedoch mit "$>$" statt "$\geq$".

$\square$

21.4 Beispiele

a) Bestimme Monotonieverhalten von $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+3}$.

$$f'(x) = \frac{(x^2+2x+3) - x(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{-x^2+3}{(x^2+2x+3)^2}\,.$$

Nenner > 0.

$f'(x) \geq 0$ für $3 - x^2 \geq 0$, dh. $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.
$f'(x) \leq 0$ für $3 - x^2 \leq 0$, dh. $x \leq -\sqrt{3}$ oder $x \geq \sqrt{3}$.

Für $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ gilt sogar $f'(x) > 0$
$\Rightarrow f(x)$ streng monoton wachsend in $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Für $x < -\sqrt{3}$ oder $x > \sqrt{3}$ ist $f'(x) < 0$ und somit ist $f(x)$ streng monoton fallend auf den entsprechenden Bereichen.

b) Die Umkehrung von Satz 21.3.b) gilt nicht!
Bsp.: $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ aber $f'(0) = 0$

Die folgenden Begriffe sind wichtig bei Optimierungsproblemen:

21.5 Definition (streng) konvex, konkav

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt konvex auf $I \subset \mathbb{R}$, wenn für alle $a, b \in I$ und $\Theta \in (0,1)$ gilt:

$$f(\Theta a + (1-\Theta)b) \leq \Theta f(a) + (1-\Theta)f(b) \, .$$

Gilt $\geq$ statt $\leq$, so heißt f konkav.
Gilt $<$ statt $\leq$ (bzw. $>$ statt $\geq$), so heißt f streng konvex bzw. streng konkav .

21.6 Veranschaulichung

a) Konvexe Funktionen verlaufen unterhalb ihrer Sekanten und haben eine Linkskrümmung.

b) Konkave Funktionen verlaufen oberhalb ihrer Sekanten und haben eine Rechtskrümmung.

Damit ist anschaulich klar:

21.7 Satz (Konvexität / Konkavität von C^1-Funktionen)

Sei $f \in C^1(I)$. Dann gilt:

a) f ist in I konvex $\Leftrightarrow$ f' in I monoton wachsend.

b) f ist in I konkav $\Leftrightarrow$ f' in I monoton fallend.

Aus Satz 21.3 und 21.7 folgt sofort:

21.8 Satz (Konvexität, Konkavität von C^2-Funktionen)

Sei $f \in C^2(I)$ mit $I \subset R$, dann gilt:

a) f ist in I konvex $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ in I.
$f''(x) > 0$ in $I \Rightarrow f$ ist in I streng konvex.

b) f ist in I konkav $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ in I.
$f''(x) < 0$ in $I \Rightarrow f$ ist in I streng konkav.

21.9 Beispiele

a) Typische konvexe Funktionen:

$f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2x$ ist monoton wachsend.
$g(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$: $g'(x) = e^x$ ist monoton wachsend.
Wegen $f''(x) > 0$ und $g''(x) > 0$ sind f, g sogar streng konvex auf $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \ln x$ ist streng konkav für $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Lokale Extrema spielen eine wichtige Rolle bei Funktionen

21.10 Definition (strenge) lokale Extrema (Minimum, Maximum)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ξ ein innerer Punkt in I (kein Randpunkt). ξ heißt lokales Maximum von f in I, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, mit

$$|x - \xi| < \epsilon \Rightarrow f(x) \leq f(\xi).$$

Gilt hingegen

$$|x - \xi| < \epsilon \Rightarrow f(x) \geq f(\xi),$$

so heißt ξ lokales Minimum von f in I.

Gilt Gleichheit nur im Punkt ξ, so liegt ein strenges lokales Maximum bzw. ein strenges lokales Minimum vor.

Wie findet man solche Extrema?

21.11 Satz (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Sei f in ξ diffbar und habe dort ein lokales Extremum (dh. lokales Minimum oder Maximum). Dann ist $f'(\xi) = 0$.

Beweis: Sei ξ ein lokales Maximum

$$\Rightarrow \exists \epsilon > 0 \ : \ |x - \xi| < \epsilon \Rightarrow f(x) \leq f(\xi).$$

Falls $x > \xi$:

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(\xi)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - \xi}_{>0}} \leq 0. \qquad (*)$$

Falls $x < \xi$:

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(\xi)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - \xi}_{<0}} \geq 0. \qquad (**)$$

Da f in ξ diffbar ist, existiert ein eindeutiger Grenzwert für $x \to \xi$. Wegen (*) und (**) ist $f'(\xi) = 0$.

$\square$

21.12 Beispiele

a) $f(x) = x^2$ hat in $\xi = 0$ ein lokales Minimum. Wegen $f'(x) = 2x$ ist $f'(0) = 0$.

Die Umkehrung von Satz 21.11 gilt nicht!
Für $f(x) = x^3$ gilt $f'(x) = 3x^2$ und daher $f'(0) = 0$. Dennoch liegt in $\xi = 0$ kein Extremum vor. Satz 21.11 liefert somit nur eine notwendige Bedingung für Extrema, die jedoch nicht hinreichend ist.

Benötigt man hinreichende Aussagen, kann man folgenden Satz zeigen:

21.13 Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f \in C^n(I), n \geq 2, \xi$ innerer Punkt von I mit $f'(\xi) = f''(\xi) = ... = f^{n-1}(\xi)$ und $f^{(n)}(\xi) \neq 0$. Dann gilt:

a) Ist n gerade, so liegt ein lokales Extremum vor. Für $f^{(n)}(\xi) > 0$ ist es ein strenges lokales Minimum, für $f^{(n)}(\xi) < 0$ ein strenges lokales Maximum.

b) Für ungerades n handelt es sich um kein Extremum.

Zur Erinnerung. Zum Beweis kann man die Taylor-Entwicklung der Funktion benutzen. Dort fallen die ersten n Glieder weg.

21.14 Beispiele

a) Für $f(x) = x^3$ gilt:

$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$
$$f'(0) = 0$$
$$f''(0) = 0$$
$$f'''(0) = 6 > 0$$

Also liegt kein Extremum in 0 vor.

b) Für $f(x) = x^4$ gilt

$$\begin{array}{llll} f'(x) = 4x^3 & f''(x) = 12x^2 & f'''(x) = 24x & f''''(x) = 24 \end{array}$$
$$\underbrace{f'(0) = 0 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = 0 \qquad f''''(0) > 24}_{\text{Somit liegt in } \xi=0 \text{ ein strenges lokales Minimum vor.}}$$

c) Es gibt Fälle, in denen Satz 21.13 nicht anwendbar ist, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

Induktiv kann man nachprüfen:
$f \in C^\infty(\mathbb{R})$,
$f^{(k)}(0) = 0; \forall k \in \mathbb{N}_0$.
Obwohl in 0 ein strenges lokales Minimum vorliegt ist Satz 21.13 nicht anwendbar.
Er liefert somit nur eine <u>hinreichende</u> Bedingung für strenge lokale Extrema. Sie ist jedoch nicht <u>notwendig</u>.

21.15 Definition Wendepunkt

Eine in ξ diffbare Funktion $f(x)$ hat einen <u>Wendepunkt</u> in ξ, falls $f'(x)$ in ξ ein lokales Extremum hat.

21.16 Bemerkung

a) Im Wendepunkt wechselt das Krümmungsverhalten:

- Hat $f'(x)$ in ξ ein lokales Maximum, so ist f' in einer Umgebung links von ξ monoton wachsend und rechts von ξ monoton fallend (<u>Konvex-Konkav-Wechsel</u>).
- Hat $f'(x)$ in ξ ein lokales Minimum, liegt ein <u>Konkav-Konvex-Wechsel</u> vor.

b) In der Signalverarbeitung beschreiben Wendepunkte die Lokalisierung von Kanten.

Analog zu Satz 21.11 und 21.13 gibt es notwendige und hinreichende Kriterien für Wendepunkte:

21.17 Satz (Notwendige Bedingung für Wendepunkte)

Sei f in ξ zweimal diffbar und habe dort einen Wendepunkt. Dann ist $f''(x)(\xi) = 0$.

21.18 Satz (Hinreichende Bedingung für Wendepunkte)

Sei $f \in C^{n+1}(I), n \geq 2, \xi$ innerer Punkt von I mit $f''(\xi) = f'''(\xi) = ... = f^{(n)}(\xi) = 0$ und $f^{(n+1)}(\xi) \neq 0$. Dann gilt:

a) Ist n gerade, liegt in ξ ein Wendepunkt vor.

- Für $f^{(n+1)}(\xi) > 0$ ist es ein Konkav-Konvex-Wechsel.
- Für $f^{(n+1)}(\xi) < 0$ ist es ein Konvex-Konkav-Wechsel.

b) Für ungerades n liegt kein Wendepunkt in ξ vor.

21.19 Beispiel

a) Für $f(x) = x^3$ gilt:
$f'(x) = 3x^2 \qquad f''(x) = 6x \qquad f'''(x) = 6$
$f'(0) = 0 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = 6 > 0$
In $\xi = 0$ liegt ein Wendepunkt mit Konvex-Konkav-Wechsel vor.

21.20 Kurvendiskusion

Ziel einer Kurvendiskussion ist die Festlegung des qualitativen und quantitativen Verhaltens des Graphen einer Funktion $f(x)$. Hierzu gehören typischerweise folgende Untersuchungen:

a) <u>Maximaler Definitionsbereich</u>
Bsp.: $f(x) = \frac{2x^2+3x-4}{x^2}$ hat den Deffinitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) <u>Symmetrien</u>

- $f(x)$ ist <u>symmetrisch zur y-Achse (gerade Funktion)</u> falls $f(-x) = f(x)\ \forall x$.
  Bsp: $f(x) = \cos x$ ist gerade Funktion.
- $f(x)$ ist <u>symmetrisch zum Ursprung (ungerade Funktion)</u> falls $f(-x) = -f(x)\ \forall x$.
  Bsp: $f(x) = \sin x$ ist ungerade Funktion.

c) <u>Polstellen</u>
Hat $f(x)$ die Form $f(x) = \frac{g(x)}{(x-\xi)^k}$ mit $g(x)$ stetig in ξ und $g(\xi) \neq 0$, so besitzt $f(x)$ in ξ:

- für ungerades k einen <u>Pol mit Vorzeichenwechsel</u>
- für gerades k einen <u>Pol ohne Vorzeichenwechsel</u>

Bsp.: $f(x) = \frac{2x^2+3x-4}{x^2}$ hat in $\xi = 0$ einen Pol ohne Vorzeichenwechsel:

- Rechtsseitiger Grenzwert ist $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

  - Linksseitiger Grenzwert ist $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

d) Verhalten im Unendlichen
Bestimme $\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)$, falls diese existieren.

Untersuchung auf Asymptoten von $f(x)$:
Für $x \to \pm\infty$ heißt $y = ax + b$ Asymptote von $f(x)$, falls $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax - b) = 0$ gilt.

a und b werden bestimmt durch

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)$$

Bsp: $f(x) = \frac{2x^2+3x-4}{x^2}$

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3x-4}{x^3} = 0$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0x) = 2$$

$\Rightarrow y = 2$ ist Asymptote.

e) Nullstellen
Können bei Polynomen vom Grad ≤ 4 analytisch bestimmt werden. Ansonsten muss man "raten" oder numerische Verfahren (z.B. Bisektionsverfahren 16.9, weitere Verfahren folgen) verwenden.
Bsp: $f(x) = \frac{2x^2+3x-4}{x^2}$

$$2x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$$
$$\Rightarrow \quad x_1 \approx -2.35,\; x_2 \approx 0.85\,.$$

f) Extrema, Monotonieintervalle

$$f(x) = \frac{2x^2+3x-4}{x^2}$$
$$f'(x) = \frac{x^2(4x+3) - 2x(2x^2+3x-4))}{x^4} = \frac{8-3x}{x^3}$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8-3x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x_3 = \frac{8}{3}$$
$$f\left(\frac{8}{3}\right) \approx 2,56$$
$$f''(x)\frac{x^3(-3) - 3x^2(8-3x)}{x^6} = \frac{6x-24}{x^4}$$

$f''\left(\frac{8}{3}\right) > 0 \Rightarrow f$ hat in $x_3 = \frac{8}{3}$ ein striktes lokales Maximum.

$$f'(x) = \begin{cases} < 0 & \text{für } \frac{8}{3} < x < \infty \text{ (streng monoton fallend)} \\ > 0, & \text{für } 0 < x < \frac{8}{3} \text{ (streng monoton wachsend)} \\ < 0, & \text{für } -\infty < x < 0 \text{ (streng monoton fallend)} \end{cases}$$

g) Wendepunkte

Bsp:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}$$

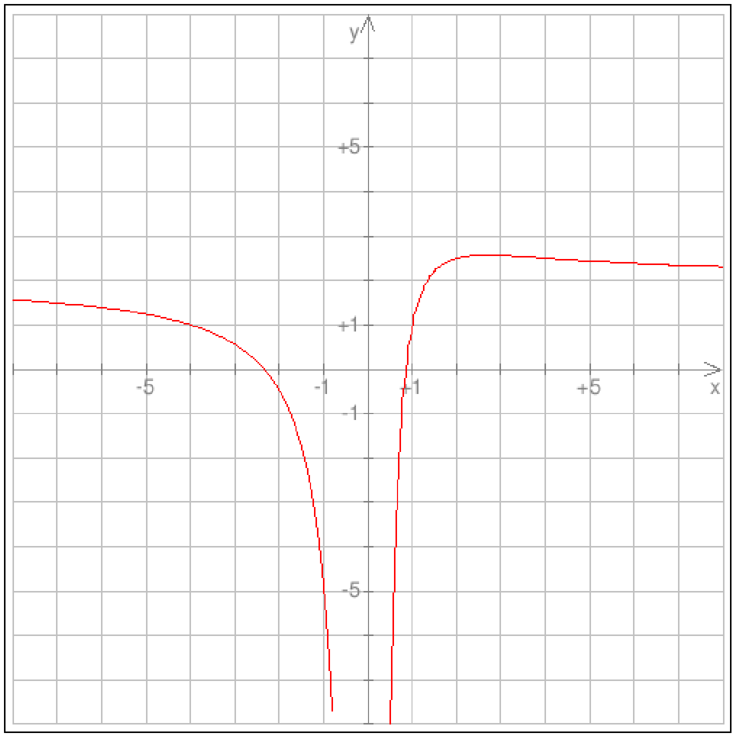
$$0 = f''(x) = \frac{6x - 24}{x^4} \Rightarrow x_4 = 4$$

$$f(4) = \frac{5}{2}$$

$$f'''(x) = \frac{x^4 * 6 - 4x^3(6x - 24)}{x^8} = \frac{-18x + 96}{x^5}$$

$f'''(4) > 0$: Wendepunkt mit Konkav-Konvex-Wechsel

h) Skizze



Kapitel 22

BANACH’SCHER FIXPUNKTSATZ

22.1 Motivation

- Viele mathematische Probleme führen auf die Nullstellensuche von Funktionen (vgl. etwa Kurvendiskussion 21.20).

- Mit dem Bisektionsverfahren 16.9 kennen wir bereits ein einfaches Verfahren hierzu.

- Für den Fall, dass wir das Problem umschreiben können auf die sogenannte Fixpunktform

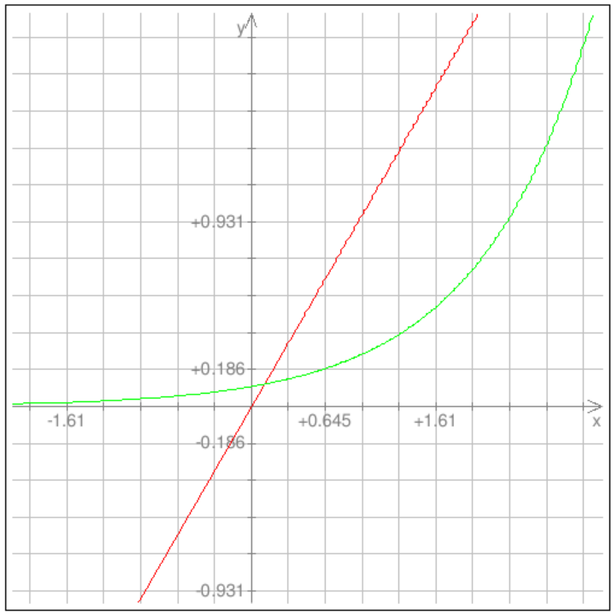
$$x = f(x)$$

  bieten sich insteressante Alternativen, die z.T. schneller konvergieren oder weitere Verallgemeinerungen haben. Dies wollen wir jetzt untersuchen.

22.2 Beispiel

Die Nullstellensuche von $g(x) = x - 0.1 * e^x$ führt auf

$$x = 0.1 * e^x$$



Im Intervall $[0,1]$ gibt es offenbar eine Nullstelle von g.

Probiert man den iterativen Ansatz

$$x_0 = 1$$

$$x_n = 0,1 * e^{x_{n-1}} \qquad n = 1, 2...$$

so erhält man bei achtstelliger Rechengenauigkeit

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 0.2718282$$

$$x_2 = 0.1312362$$

$$x_3 = 0.1140237$$

$$x_4 = 0.1120779$$

$$x_5 = 0.1118600$$

$$x_6 = 0.1118356$$

$$x_7 = 0.1118329$$

$$x_8 = 0.1118326$$

$$x_9 = 0.1118326$$

Offenbar konvergiert das Verfahren recht schnell gegen die Lösung. Ist dies Zufall?

22.3 Satz (Banach'scher Fixpunktsatz)

Sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar mit $f(I) = I$. Ferner gebe es eine Konstante $L < 1$ mit $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in I$. Dann gilt:

a) Existenz und Eindeutigkeit:
Die Gleichung $x = f(x)$ hat in I genau eine Lösung ξ ("Fixpunkt").

b) Konvergenz:
Für beliebiges $x_0 \in I$ konvergiert das Iterationsverfahren

$$x_n = f(x_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}\,,$$

gegen die Lösung ξ von $x = f(x)$.

c) A-priori-Fehlerabschätzung:
Aus den ersten beiden Approximationen x_0, x_1 kann man den Fehler von x_n abschätzen:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|\,.$$

d) A-posteriori-Abschätzung:
Mit den letzten beiden Approximationen x_{n-1}, x_n ergibt sich die (schärfere) Fehlerabschätzung

$$|\xi - x_n| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|\,.$$

<u>Beweis:</u>

(a)(b): Mit dem 1. Mittelwertsatz folgt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \qquad \forall x, y \in I\,.$$

Mit vollständiger Induktion ergibt sich somit für die Folge (x_n) mit $x_n = f(x_{n-1})$:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq L|x_n - x_{n-1}| \leq ... \leq L^n|x_1 - x_0|\,. \qquad (*)$$

Daraus folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| \leq |x_1 - x_0| \sum_{n=0}^{\infty} L^n\,.$$

Mit der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} L^n = \frac{1}{1-L}$ (vgl. 12.4) und dem Majorantenkriterium 12.7(b) folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(x_{k+1} - x_k)$.
Wegen

$$x_{n+1} = (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + ... + (x_1 - x_0) + x_0 = x_0 + \sum_{k=0}^{n}(x_{n+1} - x_n)$$

ist daher auch die Folge (x_n) konvergent.

Sei $\xi := \lim_{n\to\infty} x_n$. Da I abgeschlossen ist, ist $\xi \in I$. Anderseits ist ξ auch Grenzwert der Folge $(x_{n+1}) = (f(x_n))$. Da f diffbar ist, ist f auch stetig. Daraus folgt:

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) =^{\text{stetig}} f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(\xi)$$

d.h. ξ löst $x = f(x)$ ("ξ ist Fixpunkt von f").

Ist ξ eindeutig?
Sei μ ein weiterer Fixpunkt in I. Mit dem 1. Mittelwertsatz gilt dann

$$|\xi - \mu| =^{\text{Fixpunkt}} |f(\xi) - f(\mu)| \leq L|\xi - \mu|\,.$$

Wegen $L < 1$ ist dies nur erfüllbar, wenn $\xi = \mu$.

(c),(d) Sei $n \geq 1$. Für alle $m \geq n$ gilt:

$$x_{m+1} = (x_{m+1} - x_m) + (x_m - x_{m-1}) + ... + (x_{n+1} - x_n) + x_n = x_n + \sum_{k=n}^{m+1}(x_{k+1} - x_k)\,.$$

Im Grenzübergang $m \to \infty$:

$$\xi - x_n = \sum_{k=n}^{\infty}(x_{k+1} - x_n) =^{\text{Indexversch.}} \sum_{p=1}^{\infty}(x_{n+p} - x_{n+p-1})\,.$$

Mit

$$|x_{n+p} - x_{n+p-1}| \leq L^P|x_n - x_{n-1}|\,,$$

vgl. (*), und der geom. Reihe folgt:

$$|\xi - x_n| \leq_{\Delta\text{-Ungleichung}} \sum_{p=1}^{\infty} |x_{n+p} - x_{n+p-1}| \leq \sum_{p=1}^{\infty} L^p|x_n - x_{n-1}|$$

$$= \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}| \leq^{(*)} \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|\,.$$

□

22.4 Bemerkungen

a) Der Banach'sche Fixpunktsatz erfüllt alle Eigenschaften eines großartigen Satzes für die Informatik:

- Existenz und Eindeutigkeit eine Lösung.
- Ein konstruktiver, stets konvergenter Algorithmus.
- Fehlerabschätzungen am Anfang und während des Programmlaufs.

b) Das Beispiel 22.2 erfüllt die Vorraussetzungen des Satzes:

- Mit $f(x) = 0.1e^x$ ist $f([0,1]) \subset [0,1]$.
- f ist diffbar auf $[0,1]$.
- Wegen der Konvexität der e-Funktion gilt auf $[0,1]$:

$$|f'(x)| = 0.1e^x \leq 0.1e^1 =: L < 1 \qquad \text{(hier: } L \approx 0.218) .$$

c) Falls die Kontraktionskonstante L kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, konvergiert das Fixpunktverfahren wegen der a-priori-Abschätzung 22.3c) schneller als das Bisektionsverfahren 16.10. Darüber hinaus kann es beispielsweise auch auf vektorwertige Funktionen verallgemeinert werden. Da sie keine Ordnungsrelation zulassen, ist dort die Bisektion nicht einsetzbar.

d) Nullstellenprobleme lassen sich oft auf verschiedene Art als Fixpunktprobleme schrieben. Unterschiedliche Fixpunktiterationen haben eventuell unterschiedliches Konvergenzverhalten.
Bsp.: $f(x) = 2x - \tan x = 0$ kann man umformen zu $x = \frac{1}{2}\tan x$ oder $x = \arctan(2x)$.

Kapitel 23

DAS BESTIMMTE INTEGRAL

23.1 Motivation

Sei $f(x)$ mit $x \in [a, b]$ eine reellwertige Funktion. Ziel ist die Berechnung der Fläche zwischen $f(x)$ und der x-Achse.

Annahme: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt.

Um das Integral einzuführen müssen wir zunächst das Intervall $[a, b]$ zerlegen:

23.2 Definition Zerlegung, Partition, Knoten, Feinheit, Feinere Zerlegung

a) Eine Menge $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ der Form

$$Z = \{x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b\}$$

heißt Zerlegung (Partition, Unterteilung) des Intervalls $[a, b]$. Die x_i, $i = 0, ..., n$, heißen Knoten der Zerlegung.

b) $|Z| := \max_{0 \leq i \leq (n-1)} |x_{i+1} - x_i|$ heißt Feinheit der Zerlegung Z.

c) $\zeta := \zeta[a, b]$: Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$.

d) Eine Zerlegung Z_1 ist eine feinere Zerlegung als Z_2 ($Z_1 \supset Z_2$, Verfeinerung), falls Z_1 durch Hinzunahme weiterer Knoten zu Z_2 entsteht.

Zerlegungen sind nützlich zur Summenberechnung.

23.3 Definition Riemann-Summe, Untersumme, Obersumme

a) Jede Summe der Form

$$R_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

heißt Riemann-Summe von f zur Zerlegung Z.

b)

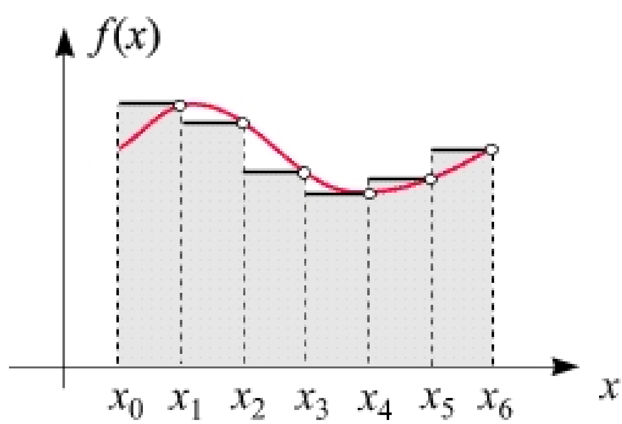
$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf{}_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi)(x_{i+1} - x_i)$$

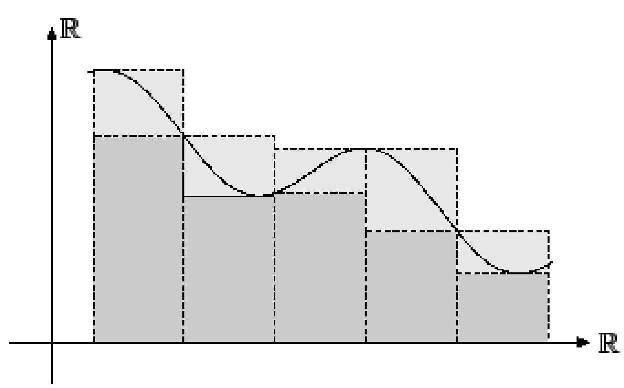
heißt Untersumme von f zur Zerlegung Z.

c)

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup{}_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi)(x_{i+1} - x_i)$$

heißt Obersumme von f zur Zerlegung Z.





23.4 Bemerkungen

a) Für jedes feste Z gilt:
$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)\,.$$

b) Verfeinerungen vergrößern Untersummen und verkleinern Obersummen
$$Z_1 \supset Z_2 \Rightarrow U_f(Z_1) \geq U_f(Z_2)$$
$$Z_1 \supset Z_2 \Rightarrow O_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

c) Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a,b]$ gilt stets:
$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)\,.$$
($U_f(Z_1)$ unterhalb, $O_f(Z_2)$ oberhalb der Kurve.)

Die Untersumme ist stets nach oben, die Obersumme nach unten beschränkt.

23.5 Definition Riemannsches Unter/Ober-Integral, Integrierbarkeit

a) Aufgrund der obigen Eigenschaften existieren die Grenzwerte
$$\int_{\overline{a}}^{b} f(x)dx := \ \text{sup}\ _{Z\in\zeta[a,b]} U_f(Z)\,,\quad \int_a^{\underline{b}} f(x)dx := \ \text{inf}\ _{Z\in\zeta[a,b]} O_f(Z)\,.$$
Sie heißen (Riemann'sches-) Unter- bzw. Oberintegral.

b) $f(x)$ heißt (Riemann-)integrierbar über $[a,b]$, wenn Unter- und Oberintegral übereinstimmen. Dann heißt
$$\int_a^b f(x)dx := \int_{\overline{a}}^{b} f(x)dx = \int_a^{\underline{b}} f(x)dx$$
(Riemann-) Integral von $f(x)$ über $[a,b]$.

23.6 Beispiele

a) Sei $f(x) = c =$ constant
$$\Rightarrow U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c \cdot (x_{i+1} - x_i) = c \cdot (b-a)\,.$$

b) Sei $\xi \in [a,b]$. Dann ist $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \neq \xi \\ 1, & \text{wenn } x = \xi \end{cases}$ integrierbar. Denn für jede Zerlegung Z gilt:

$$U_f(Z) = 0\,,\ 0 < O_f(Z) \leq 2|Z|\,.$$

Also ist $\int_a^b f(x)dx = 0$, da die Feinheit von Z beliebig klein gewählt werden kann.

c) Betrachte die Dirichlet'sche Sprungfunktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1, & \text{wenn } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Für jede Zerlegung Z ist

$$U_f(Z) = 0\,,\ O_f(Z) = 1\,,$$

da wir in jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ stets eine rationale und eine irrationale Zahl finden. Damit ist f nicht Riemann-integrierbar. (Es gibt jedoch Integrierbarkeitsbegriffe, z.B., das Lebesgue-Integral, nach denen solche Funktionen integrierbar sind.)

Welche Eigenschaften hat das Riemann-Integral?

23.7 Definition Fläche

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative, integrierbare Funktion, so wird die Zahl

$$\int_a^b f(x)dx$$

als <u>Fläche</u> zwischen der Kurve $f(x)$ und der x-Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ bezeichnet.

23.8 Bemerkung

a) Ist f negativ, so kann man die Fläche durch $\int_a^b |f(x)|dx$ bestimmen.

b) Ist $b < a$, so definiert man $\int_a^b f(x)dx \ := \ -\int_b^a f(x)dx$.

23.9 Lemma (Monotonie des Integrals)

Sind f, g integrierbar über $[a,b]$ mit $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx\,.$$

<u>Beweis:</u> Zu jeder Zerlegung Z gilt

$$U_f(Z) \leq U_g(Z)\,,$$

$$O_f(Z) \le O_g(Z)\,.$$

Diese Ungleichungen übertragen sich auf das Supremum (Unterintegral) bzw. Infimum (Oberintegral).

□

23.10 Folgerung

Integration erhält die Nichtnegativität:

$$f(x) \ge 0\ \forall x \in [a,b] \ \Rightarrow \ \int_a^b f(x)dx \ge 0\,.$$

Beweis: Lemma 23.9 angewandt auf $f(x)$ und 0 ergibt

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b 0dx = 0\,.$$

□

23.11 Folgerung

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

Beweis: Mit Lemma 23.9 folgt aus $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx\,,$$

und somit

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx\,.$$

□

Ferner kann man zeigen:

23.12 Satz (Linearität der Integration)

Seien f, g integrierbar über $[a,b]$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha f(x) + \beta g(x)$ integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx\,.$$

Integrale lassen sich zerlegen:

23.13 Lemma (Zusammensetzung von Integrationsintervallen)

Ist $a \leq c \leq b$, so ist f genau dann über $[a, b]$ integrierbar, wenn f über $[a, c]$ und über $[c, b]$ integrierbar ist. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Beweis: Aussage folgt unmittelbar aus der Betrachtung von Ober- und Untersumme zu Zerlegungen, die c als Knoten enthalten (ggf. durch Verfeinerung erreichbar).

$\square$

Man kann zeigen, dass viele wichtige Funktionen integrierbar sind.

23.14 Satz (Integrierbarkeit monotoner oder stetiger Funktionen)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

a) Ist f monoton, so ist f integrierbar.

b) Ist f stetig, so ist f integrierbar.

23.15 Beispiele

Folgende Funktionen sind über ein Intervall $[a, b]$ integrierbar

a) $f(x) = \sqrt{x}$, falls $a \geq 0$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = \ln x$, falls $a > 0$

d) $f(x) = \sin x$

e) Polynomfunktionen $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

f) Stückweise stetige Funktionen mit endlich vielen Sprungstellen (Induktionsbeweis über Zahl der Sprungstellen)

In der Differentialrechnung waren Mittelwertsätze sehr wichtig (vgl. Paragraph 19). Es gibt Ähnliches für die Integralrechnung:

23.16 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und nicht negativ. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)dx \, .$$

Bemerkung: Für $\int_a^b g(x)dx > 0$ kann man

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

als Mittelwert von f im Intervall $[a,b]$ mit einer Gewichtungsfunktion g ansehen.

Beweis von Satz 23.16
Seien $m := \min_{x\in[a,b]} f(x)$, $M := \max_{x\in[a,b]} f(x)$.
Da g nicht-negativ ist, gilt:

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \, ,$$

und damit nach der Monotonie (Lemma 23.9):

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx \, .$$

Somit existiert eine Zahl $\mu \in [m,M]$ ("Mittelwert") mit

$$\mu \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx \, .$$

Da f stetig ist existiert nach dem Zwischenwertsatz (16.10.b) ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \mu$. Somit gilt hier

$$f(\xi) \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx \, .$$

□

Mit $g(x) = 1 \; \forall x \in [a,b]$ ergibt sich eine wichtige Folgerung, die oft auch schon als Mittelwertsatz der Integralrechnung bezeichnet wird:

23.17 Korollar (Intergralmittel)

Für eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \, .$$

23.18 Veranschaulichung

Die Fläche unter der Funktion stimmt mit der Rechtecksfläche $(b-a) \cdot f(\xi)$ überein:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)\,.$$

Kapitel 24

DAS UNBESTIMMTE INTEGRAL UND DIE STAMMFUNKTION

24.1 Motivation

- Gibt es eine Operation, die die Differentiation "rückgängig" macht?
- Gibt es einfache Regeln zur Berechnung von $\int_a^b f(x)dx$ ohne mühsames Hantieren mit Ober/Untersummen und ihren Grenzwerten?

24.2 Definition Stammfunktion

Gegeben seien Funktionen $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ist F differenzierbar auf $[a, b]$ und gilt

$$F'(x) = f(x) \; \forall x \in [a, b] ,$$

so nennt man F eine Stammfunktion von f.

Bemerkung: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F(x) + c$ mit einer beliebigen Konstanten c Stammfunktion von $f(x)$. Umgekehrt kann man zeigen, dass sich zwei Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ von $f(x)$ höchstens um eine Konstante unterscheiden.

Kommen wir nun zum Gipfel der Analysis:

24.3 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

a) $G(x) := \int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.
("Integration als Umkehrung der Differentiation")

b) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b := [F(x)]_a^b \,.$$

("Stammfunktion als Mittel zur Berechnung von Integralen")

Beweis:

a) Sei $h \neq 0$ ($h < 0$ ebenfalls zugelassen) so, dass $x, x+h \in [a,b]$.

$$\left|\frac{1}{h}(G(x)+h) - G(x)) - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\underbrace{\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)\right)}_{\text{Definition von G(x)}} - f(x)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - f(x)\right|$$

$$= |f(\xi) - f(x)|$$

mit einem ξ zwischen x, $x+h$ (Integralmittel 23.17)
$\to 0$ für $h \to 0$, da f stetig. Somit ist $G'(x) = f(x)$.

b) Mit a) gilt für eine beliebige Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + c\,.$$

Damit folgt:

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + c\,,$$

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + c = c\,,$$

und somit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt\,.$$

□

24.4 Definition unbestimmtes Integral

Die Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ bezeichnen wir auch als "das" unbestimmte Integral von $f(x)$,

$$\int f(x)dx$$

geschrieben (d.h. ohne die Integrationsgrenzen).

Es ist jedoch nur bis auf eine additive Konstante cC bestimmt.

24.5 Beispiele von unbestimmten Integralen

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C \qquad (x \neq 0)$

$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$

$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$

$\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + C \qquad (\cos(x) \neq 0)$

$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C \qquad (x \neq (2k+1)\frac{\Pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$

$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \qquad (a \neq 0)$

$\int \ln(x)dx = x(\ln(x) - 1) + C \qquad (x > 0)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C \qquad (|x| < 1)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C \qquad (|x| > 1)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$

$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \qquad (|x| \neq 1)$

Weitere Beispiele siehe Formelsammlungen, z.B. Teubner-Taschenbuch zur Mathematik.

Unbekannte Integrale kann man durch (z.T. trickreiche) Umformungen in bekannte Integrale überführen. Hierzu gibt es 2 Grundtechniken:

24.6 Satz (Integrationsregeln)

a) Partielle Integration
Seien $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx\,,$$

und für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx\,.$$

b) Substitutionsregel
Zur Berechnung von $\int_a^b f(x)dx$ setze man $x = g(z)$ mit g stetig differenzierbar, $g(a) = c, g(b) = d$, und formal:

$$dx = g'(z)dz$$

$$\int_{x=c}^{x=d} f(x)dx = \int_{z=a}^{z=b} f(g(z))g'(z)dz\,.$$

Beweis

a) Folgt aus der Produktregel der Differentiation:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b (uv)'dx}_{uv|_a^b} = \int_a^b u'vdx + \int_a^b v'udx\,.$$

b) Folgt aus der Kettenregel für $F' = f$,

$$\frac{d}{dz}(F(g(z)) = F'(g(z)) \cdot g'(z) = f(g(z)) \cdot g'(z)\,,$$

nach Integration über z im Bereich $[a, b]$:

$$\int_a^b f(g(z))g'(z)dz = F(g(z))|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx\,.$$

□

24.7 Beispiele zur partiellen Integration

a)

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$$

b)

$$\int \ln(x)dx = \int \underbrace{1}_{v'}\underbrace{\ln(x)}_{u}dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x + C$$

c)

$$\int \sin^2(x)dx = \int \underbrace{\sin x}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v'}dx = \sin(x)(-\cos(x)) + \int \cos^2(x)dx$$

$$= -\sin(x)\cos(x) + \int 1 - \sin^2(x)dx \qquad | + \int \sin^2(x)dx$$

$$2\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + x + c \qquad | : 2$$

$$\int \sin^2(x)dx = -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{x}{2} + C$$

24.7.1 Beispiele zur Substitutionsregel

a)

$$\int e^{\sqrt{x}}dx$$

Substitution: $z = \sqrt{x}$ $\qquad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2z} \Rightarrow dx = 2zdz$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^z 2zdz \overset{\text{nach 24.7a)}}{=} 2(ze^z - e^z) + C$$

$$= 2(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + C$$

b)

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

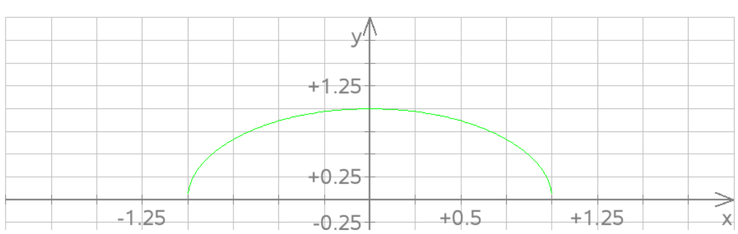
Substitution: $x = \cos(z)$ $\qquad \frac{dx}{dz} = -\sin(z) \Rightarrow dx = -\sin(z)dz$

$$\int_{x=-1}^{x=1} \sqrt{1-x^2}dx = \int_{z=\pi}^{z=0} \sqrt{1-\cos^2(z)} \cdot (-\sin(z))dz$$

$$= -\int_{\pi}^{0} \sin^2(z)dz = \int_0^{\pi} \sin^2 zdz \overset{\text{24.7.c)}}{=} -\frac{1}{2}\sin(z)\cos(z) + \frac{1}{2}z|_0^{\pi}$$

$$= -0 + \frac{1}{2}\pi - (0+0) = \frac{\pi}{2}$$

Macht Sinn, denn dieses Integral beschreibt die Fläche einer Halbkreisscheibe mit Radius 1:



24.8 Bemerkung

Nicht alle Itegrale lassen sich analytisch lösen.
Beispiel: ”Fehlerfunktion”

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\Pi}} * \int_0^x e^{-t^2} dt \,.$$

In Formelsammlungen tabelliert oder numerisch approximierbar.

24.9 Integration rationaler Funktionen

Integrale über rationale Funktionen führt man mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung auf bekannte Integrale zurück.

Beispiel

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} \,.$$

Wegen $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{(A+B)x + (-3A - 2B)}{(x-2)(x-3)}$$

Koeffizientenvergleich:

$$A + B = 0 \qquad (1)$$

$$-3A - 2B = 1 \qquad (2)$$

Addition des 3 fachen von (1) zu (2) ergibt $B = 1$, d.h. in (1) $\Rightarrow A = -1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

Es ist dann

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = -\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3}$$

$$= -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C$$

$$= \ln x \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C \qquad (x \neq 2 \text{ und } x \neq 3).$$

Kapitel 25

UNEIGENTLICHE INTEGRALE

25.1 Motivation

Manchmal muss man Integrale berechnen,

- bei denen über ein unendliches Intervall integriert wird

  Beispiele: $\int_a^\infty f(x)dx,\ \int_{-\infty}^b f(x)dx,\ \int_{-\infty}^\infty f(x)dx\,.$

- bei denen unbeschränkte Funktionen vorliegen

  Beispiel: $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}\,.$

Solche Integrale heißen uneigentliche Integrale. Unter welchen Bedingungen ist deren Berechnung möglich?

Fall 1: Unendliche Integrationsgrenzen

25.2 Definition konvergentes Integral

Sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ über jedem Intervall $[a,R]$ mit $a < R < \infty$ integrierbar.
Falls

$$\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$$

existiert, heißt $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent, und man setzt

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx\,.$$

Analog definiert man

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx$$

für $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$.

Ferner setzt man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx \text{ für } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,.$$

25.3 Beispiele

a) Konvergiert $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ für $p > 1$?

$$\int_1^R \frac{dx}{x^p} \overset{24.5}{=} \frac{1}{1-p}\,\frac{1}{x^{p-1}}\Big|_1^R$$
$$= \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{R^{p-1}}\right)\,.$$

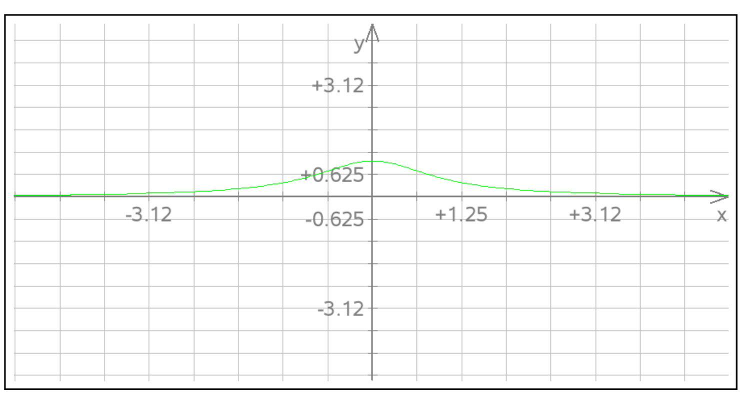
Mit $\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{p-1}} = 0$ folgt die Konvergenz von $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ für $p > 1$:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}\,.$$

Bemerkung: Für $p \leq 1$ ist $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ divergent.

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R_1\to\infty} \int_{-R_1}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R_2\to\infty} \int_0^{R_2} \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \lim_{R_1\to\infty} \arctan(x)|_{-R_1}^0 + \lim_{R_2\to\infty} \arctan(x)|_0^{R_2}$$
$$= -\lim_{R_1\to\infty} \arctan(-R_1) + \lim_{R_2\to\infty} \arctan R_2 - 0$$
$$= 0 - (-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$



Fall 2: Integration unbeschränkter Funktionen

25.4 Definition konvergentes Integral

Sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ über jedem Teilintervall $[a + \varepsilon, b]$ mit $0 < \varepsilon < b - a$ integrierbar und in a nicht definiert ("singulär").
Falls

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

existiert, heißt $\int_a^b f(x)dx$ konvergent, und man setzt

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\,.$$

Eine analoge Definition gilt, fall $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ in b nicht definiert ist:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx\,.$$

Falls $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in a und b nicht definiert ist, setzt man

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{mit } c \in (a, b).$$

Falls Polstellen im Inneren das Integrationsbereiches liegen, spaltet man das Integral so in Teilintegrale auf, dass die Polstellen an den Grenzen der Teilintegrale liegen.

25.5 Beispiele

Konvergiert $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ für $0 < p < 1$?

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \cdot \left[x^{1-p}\right]_\varepsilon^1$$

$$= \frac{1}{1-p}(1 - \varepsilon^{1-p})$$

$$\to \frac{1}{1-p} \text{ für } \varepsilon \to 0 \text{ (Konvergenz).}$$

Bemerkung: $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ konvergiert nicht für $p \geq 1$:

$$p = 1 \qquad \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \ln|x||_\varepsilon^1 = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln \varepsilon$$

$$\to \infty \qquad \text{für } \varepsilon \to 0\,.$$

$$p > 1 \qquad \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{x^{p-1}}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{p-1}} - 1\right)$$

$$\to \infty \;\; \text{für } \varepsilon \to 0\,.$$

Für unendliche Integrale kann man ähnliche Konvergenzkriterien wie für Reihen zeigen (vgl. Paragraph 12):

25.6 Satz (Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale)

Sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ integrierbar auf jedem endlichen Intervall $[a,b]$. Dann gilt:

a) Cauchy-Kriterium:

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ existiert } \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \;\exists c > a \;:\; \left|\int_{z_1}^{z_2} f(x)dx\right| < \varepsilon \;\forall z_1, z_2 > c$$

b) Absolute Konvergenz:
Ist $\int_a^\infty |f(x)|dx$ konvergent (d.h. $\int_a^\infty f(x)dx$ ist absolut konvergent), so konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$.

c) Majorantenkriterium:
Ist $|f(x)| \le g(x) \;\; \forall x \in [a,\infty)$, und konvergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, so konvergiert $\int_a^\infty f(x)dx$ absolut.
Gilt umgekehrt $0 \le g(x) \le f(x)$ und divergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$.

Bemerkung: Entsprechende Aussagen gelten auch beim nach unten beschränkten Integrationsbereich $(-\infty, b]$, sowie an Singularitäten an den Enden eines beschränkten Intervalls $[a,b]$.

25.7 Beispiel

Das Dirichlet-Itegral $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$

Cauchy-Kriterium ergibt für $0 < z_1 < z_2$:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin(x)}{x}dx = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{x}\sin(x)dx = \text{part. Integration } -\left.\frac{\cos(x)}{x}\right|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\cos(x)}{x^2}dx$$

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin(x)}{x}dx\right| \le \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \int_{z_1}^{z_2} \frac{dx}{x^2} \to 0 \text{ für } z_1 \to \infty$$

da $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ nach 25.3 konvergent. Das Dirichlet-Integral tritt z.B. in der Signalverarbeitung auf (vgl. sinc-Funktion).

25.8 Beispiel

Die Gammafunktion (Euler, 1707 - 1783)

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt \ \text{ für } x > 0.$$

Konvergiert dieses Integral?

Probleme:

a) Für $a < x < 1$ divergiert $e^{-t} \cdot t^{x-1}$ in $t = 0$.

b) Obere Integrationsgrenze ist ∞.

Wir spalten daher auf:

$$\Gamma(x) := \int_0^1 e^{-t} \cdot t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt\,,$$

und behandeln beide Probleme getrennt:

a) Betrachte $\int_0^1 e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$ für $0 < x < 1$:
Wegen $0 \leq e^{-t} \leq 1$ hat $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ die nach 25.5 konvergente Majorante $\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1-x}}$.

b) Betrachte $\int_1^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$.
Wir möchten dieses Integral durch die konvergente Majorante $c \int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ abschätzen (vgl. 25.3.(a)).
Hierzu muss gelten: $e^{-t} \leq c t^{-x-1}$ für ein $c > 0$.
Dies ist erfüllbar: Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Potenz (vgl. 17.4), gibt es ein $c > 0$ mit

$$\frac{t^{x+1}}{e^t} \leq c \ \text{ für alle } t \geq 1\,.$$

Somit ist $\int_1^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$ konvergent.

Also existiert $\Gamma(x)$ für alle $x > 0$.

Zwei wichtige Eigenschaften der Gammafunktion sind:

i)

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{R \to \infty} -e^{-t}|_0^R = -0 + 1 = 1$$

ii)

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt = \underbrace{e^{-t} \cdot \frac{1}{x} t^x |_{t=0}^{t=\infty}}_{=0} + \frac{1}{x} \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} \cdot t^x dt}_{=\Gamma(x+1)}$$

d.h.:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

Wegen (i) und (ii) interpoliert die Gammafunktion die Fakultät:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Kapitel 26

KURVEN UND BOGENLÄNGE

26.1 Motivation

Der Begriff der Kurve in der Ebene oder im Raum spielt eine wichtige Rolle in der Physik (Teilchenbahnen) und in der Informatik (Robotik, Computergrafik).

Um eine Kurve zu definieren, betrachten wir die Bewegung eines punktförmigen Teilchens im Raum, die durch die Angabe seines Ortes zur Zeit t beschrieben wird:

26.2 Definition: Kurve, Spur

Eine (parametrisierte) Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rcll} c & : & [a,b] & \to & \mathbb{R}^n \\ & & t & \mapsto & (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^\top \end{array}$$

deren Komponentenfunktionen $x_1, \ldots, x_n \; : \; [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sind.
Eine Kurve c heißt stetig differenzierbar (C^1-Kurve), wenn alle x_i stetig differenzierbar sind.

$$\text{Man definiert:} \qquad \dot{c}(t) := \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \ldots, \frac{dx_n(t)}{dt} \right)^\top$$

Das Bild $c([a,b])$ heißt Spur von c.

26.3 Bemerkungen

(a) Eine parametrisierte Kurve ist also eine vektorwertige Funktion einer Variablen.

(b) Verschiedene Kurvenparametrisierungen können zur selben Spur führen.

Beispiel.

$$\begin{aligned} c_1(t) &:= (\cos t, \sin t)^\top, \ t \in [0, 2\pi] \\ c_2(t) &:= (\cos t, -\sin t)^\top, \ t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

haben den Einheitskreis als Spur, unterscheiden sich aber im Durchlaufsinn.

26.4 Beispiele

(a) <u>Ellipse</u> mit Hauptachsen a und b:

$$\begin{aligned} x(t) &:= a \cos t \\ y(t) &:= b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Aus $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ folgt die Spurgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Für $a = b = r$ ergibt sich ein Kreis mit Radius r.

(b) <u>Schraubenlinie</u>
Überlagerung einer Kreisbewegung mit Radius r in der x-y-Ebene mit einer linearen Bewegung in z-Richtung:

$$c(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)^\top, \ t \in \mathbb{R}$$

26.5 Definition: Umparametrisierung

Ist $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die "neue" Kurve

$$\tilde{c}(\tau) := c\,(h(\tau)) \quad \text{mit} \quad \tau \in [\alpha, \beta]$$

die selbe Spur und den selben Durchlaufsinn wie c.

Man nennt $t = h(\tau)$ einen <u>Parameterwechsel</u> (<u>Umparametrisierung</u>).

Kurven, die durch einen Parameterwechsel auseinander hervorgehen, werden als gleich angesehen.

Ist c stetig differenzierbar, werden nur stetig differenzierbare Funktionen $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ mit $h'(\tau) > 0 \ \forall \tau \in [\alpha, \beta]$ als Parameterwechsel zugelassen (<u>C^1-Parameterwechsel</u>).

26.6 Länge einer Kurve

Interpretiert man eine C^1-Kurve $c(t)$ als Bewegung eines Teilchens, so beschreibt die Ableitung $\dot{c}(t)$ den Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t.

Während des Zeitintervalls $[a, b]$ legt das Teilchen den Weg

$$L(c) \; =; \int_a^b |\dot{c}(t)| \; dt$$

zurück. Dieses Integral definiert die Länge einer C^1-Kurve $\; c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

26.7 Beispiel

Wir wollen den Umfang eines Kreises

$$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

mit Radius r berechnen:

$$L(c) = \int_0^{2\pi} |\dot{c}(t)| \; dt$$

Mit

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \\ |\dot{c}(t)| &= \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = \sqrt{r^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} = r \end{aligned}$$

erhält man

$$L(c) = \int_0^{2\pi} r \, dt = 2\pi r$$

Warum ist die Kurvenlänge wichtig?

Mit Hilfe der Substitutionsregel kann man zeigen:

26.8 Lemma (Invarianz der der Kurvenlänge)

Die Länge einer C^1-Kurve ändert sich nicht unter einer Umparametrisierung.

Betrachten wir nun die zurückgelegte Wegstrecke als Funktion der Zeit:

26.9 Definition: Bogenlänge

Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve. Dann nennt man die Funktion

$$s(t) \;:=\; \int_a^t |\dot{c}(\tau)| \; d\tau$$

die Bogenlängenfunktion von c.

Reparametrisiert man eine Kurve mit ihrer Bogenlänge, so nennt man dies Bogenlängenparametrisierung.

26.10 Beispiel

Betrachte Kreis mit Radius r und der Parametrisierung

$$c(t) \;=\; \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Mit $|\dot{c}(t)| = r$ (vgl. 27.7) lautet die Bogenlängenfunktion

$$s(t) \;:=\; \int_a^t r \, d\tau \;=\; rt$$

Somit hat der Kreis die Bogenlängenparametrisierung

$$c(s) \;=\; \begin{pmatrix} r\cos(s/r) \\ r\sin(s/r) \end{pmatrix}$$

26.11 Bedeutung der Bogenlängenparametrisierung

Bei Bogenlängenparametrisierung wird als “Zeit” der zurückgelegte Weg gewählt. Somit ist die Geschwindigkeit gleich 1: $|\dot{c}(t)| = 1$.

Damit vereinfachen sich viele Formeln.

26.12 Definition: Krümmung

Für eine zweimal stetig differenzierbare Kurve $c(s)$ in Bogenlängenparametrisierung bezeichnet man den “Betrag der Beschleunigung” $|\ddot{c}(s)|$ als Krümmung κ von c.

26.13 Beispiel

Kreis mit Radius r in Bogenlängenparametrisierung:

$$c(s) \;=\; \begin{pmatrix} r\cos(s/r) \\ r\sin(s/r) \end{pmatrix}$$

Dann ist:

$$\dot{c}(s) = \begin{pmatrix} -\sin(s/r) \\ \cos(s/r) \end{pmatrix}, \qquad \ddot{c}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}\cos(s/r) \\ -\frac{1}{r}\sin(s/r) \end{pmatrix}$$

$$\kappa = |\ddot{c}(s)| = \sqrt{\frac{1}{r^2}\cos^2\frac{s}{r} + \frac{1}{r^2}\sin^2\frac{s}{r}} = \frac{1}{r}$$

26.14 Bemerkung

Allgemein gilt: Die Krümmung gibt den inversen Radius des Kreises an, der sich an der Stelle s an die Kurve $c(s)$ anschmiegt (Schmiegekreis).