52 Das Newton-Verfahren

52.1 Motivation

Das Konvergenzverhalten von Fixpunkt-Iterationen

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \qquad k \in \mathbb{N}$$

zur Lösung nichtlinearer Gleichungen hängt entscheidend von der Wahl der Verfahrungsfunktion Φ ab.

Eine geschickte Wahl von Φ führt auf das Newton-Verfahren. Es beruht auf einer Taylorapproximation 1. Ordnung (Linearisierung) und konvergiert sehr schnell, falls es konvergiert.

52.2 Newton-Verfahren für eine nichtlineare Gleichung

Wir suchen eine Nullstelle einer skalaren C^1-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.

Das Newton-Verfahren basiert darauf, bei einem Näherungswert x_0 den Graphen von f durch die Tangente zu ersetzen und dessen Nullstelle als neue Näherung x_1 zu benutzen. Dieses Vorgehen wird iteriert.

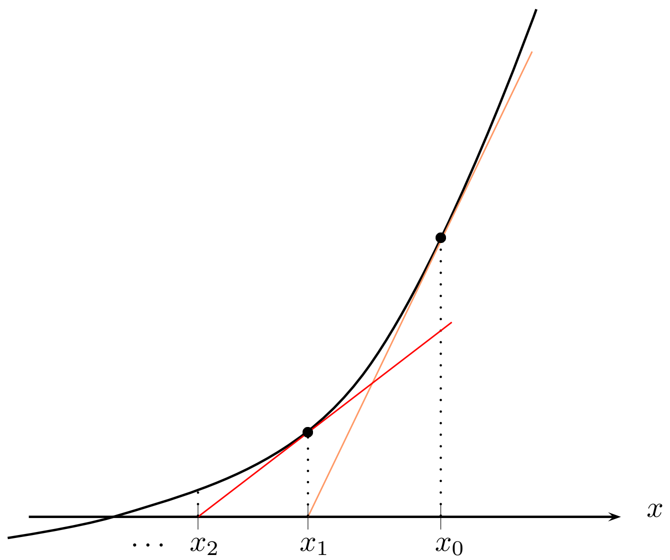

Abbildung 1:

Tangente in x_0:

$$\begin{aligned} T_1(x) &= f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) \\ & \text{(Taylorpolynom 1. Ordnung)} \end{aligned}$$

$x_1 :=$ Nullstelle von T_1:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot f'(x_0) \\ &\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

allgemeine Iterationsvorschrift:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} =: \Phi(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

52.3 Beispiel

$f(x) = x^2 - 2$ hat Nullstellen bei $\pm\sqrt{2} \approx \pm 1.4142136\ldots$.
Mit der Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} \;=\; x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}$$

und Startwert $x_0 := 1$ ergibt sich:

k	x_k
0	1.0000000
1	1.5000000
2	1.4166667
3	1.4142157
4	1.4142136

52.4 Bemerkung:

Das Verfahren konvergiert nicht immer, im Allgemeinen konvergiert es erst, wenn der Startwert x_0 „hinreichend nahe" bei der Nullstelle liegt (lokale Konvergenz).

Einen wichtigen Fall, in dem Konvergenz auftritt, enthält der folgende Satz:

52.5 Satz: (Konvergenz des Newtonverfahrens)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gilt:

a) *Es gibt genau ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$.*

b) *Ist $x_0 \in [a, b]$ beliebig mit $f(x_0) \geq 0$, so ist die Folge*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ.

c) *Gilt $f'(\xi) \geq C > 0$ und $f''(x) \leq K \;\; \forall\, x \in (\xi, b)$ mit $K > 0$, so hat man für $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzungen*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |\xi - x_n| \leq \frac{K}{2C} |x_n - x_{n-1}|^2.$$

Beweis von (a) und (b):

a) Da f konvex ist, gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ und folglich ist f' monoton wachsend in $[a,b]$. Als stetige Funktion nimmt f sein Minimum über dem Intervall $[a,b]$ an, genauer:

$$\exists q \in [a,b) \quad \text{mit} \quad f(q) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} < 0.$$

Falls $q \neq a$, gilt $f'(q) = 0$ und damit $f'(x) \leq 0$ für $x \leq q$ (f' monoton wachsend).

$\Rightarrow$ f ist im Intervall $[a,q]$ monoton fallend.
$\Rightarrow$ f kann in $[a,q]$ keine Nullstelle haben.

Dies stimmt auch für $q = a$.
Nach dem Zwischenwertsatz 19.2.b) liegt im Intervall (q,b) <u>mindestens eine</u> Nullstelle von f. Nach dem bisher Gezeigtem liegen <u>alle</u> Nullstellen in (q,b).

Angenommen es gäbe zwei Nullstellen $\xi_1 < \xi_2$.
Nach dem Mittelwertsatz (23.2) existiert $t \in (q, \xi_1)$ mit

$$f'(t) = \frac{f(\xi_1) - f(q)}{\xi_1 - q} = \frac{-f(q)}{\underbrace{\xi_1 - q}_{>0}} > 0.$$

$\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ für alle $x \geq \xi_1$ (f' monoton wachsend)
$\Rightarrow$ f ist <u>streng monoton</u> wachsend (und positiv) in $(\xi_1, b]$ und kann damit keine zweite Nullstelle $\xi_2 \in (\xi_1, b]$ besitzen.

b) Sei $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \geq 0$. Nach bisher Gezeigtem gilt: $\quad x_0 \geq \xi$.
Durch Induktion beweisen wir, dass für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad (*)$$

gilt: $f(x_n) \geq 0$ und $x_{n-1} \geq x_n \geq \xi \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang: $n = 0$. O.K.

Induktionsschritt: $n \to n+1$: Aus $x_n \geq \xi$ folgt $f'(x_n) \geq f'(\xi) > 0$ (vgl. a))
$\Rightarrow \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq 0$
$\overset{\text{nach } (*)}{\Rightarrow} x_{n+1} \leq x_n$.

Wir zeigen: $f(x_{n+1}) \geq 0$.
Wir betrachten dazu die Hilfsfunktion

$$g(x) := f(x) - f(x_n) - (x - x_n)f'(x_n).$$

f' ist monoton wachsend.
$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - f'(x_n) \leq 0$ für $x \leq x_n$.
Da $g(x_n) = 0$, gilt $g(x) \geq 0$ für $x \leq x_n$, also gilt insbesondere

$$0 \leq g(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - \underbrace{f(x_n) - (x_{n+1} - x_n)f'(x_n)}_{=0 \text{ nach } (*)} = f(x_{n+1})$$

Aus $f(x_{n+1}) \geq 0$ folgt nach a), dass $x_{n+1} \geq \xi$. Damit ist gezeigt: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ fällt monoton und ist nach unten beschränkt durch ξ.

$\Rightarrow$ Es existiert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =: x^*$. Man hat $f(x^*) = 0$ (Fixpunkt-Iteration).
$\Rightarrow$ $x^* = \xi$ wegen der Eindeutigkeit der Nullstelle. $\square$

52.6 Bemerkungen

a) Analoge Aussagen gelten auch, falls f konkav ist oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ gilt.

b) Die Fehlerabschätzung 52.5.c) besagt, dass beim Newton-Verfahren quadratische Konvergenz vorliegt. Ist etwa $\frac{K}{2C} \approx 1$ und stimmen x_{n-1} und x_n auf k Dezimalen überein, so ist die Näherung x_{n+1} auf $2k$ Dezimalen genau und bei jeder Iteration verdoppelt sich die Zahl der gültigen Stellen.