

Mathematik für Informatiker I

Prof. Dr. Joachim Weickert
PD Dr. Michael Breuß
Wintersemester 2006/2007

Probeklausur

Dieses Aufgabenblatt ist im Umfang einer dreistündigen Klausur angelegten. Numerische Berechnungen sind, sofern nicht anders angegeben, mit Taschenrechnerngenauigkeit auszuführen.

Aufgabe 1

Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Teilbarkeitsregel: Eine natürliche Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme (also die Summe ihrer Ziffern) durch 3 teilbar ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 2

Beweisen Sie: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq \frac{1}{3}n!.$$

Tipp: Sie können die Beziehung

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

benutzen.

(8 Punkte)

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe eines indirekten Beweises die Gültigkeit folgender Aussage: Ist p eine Primzahl, so ist \sqrt{p} eine irrationale Zahl.

(8 Punkte)

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) für

$$a_n := \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}.$$

(b) Bestimmen Sie für jedes $x \in (0, \infty)$ den Grenzwert der Folge (b_n) mit

$$b_n := \frac{x^n - n}{x^n + n}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 5

Untersuchen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1}.$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n \cdot \arctan(x))}{2^n}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 6

Fertigen Sie eine Kurvendiskussion zu der folgenden Funktion f an. Untersuchen Sie dazu: Definitionsbereich, Symmetrien, Pole, Verhalten im Unendlichen und Asymptoten, Nullstellen, Extrema und Monotonie, Wendepunkte und Konvexität.

$$f(x) = x\sqrt{16 - x^2}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 7

(a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{e^{3x} + 3e^{2x} - 2e^x}{e^{3x} - e^{2x} + e^x - 1} dx.$$

(b) Berechnen Sie

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 8

Eine Standardaufgabe in der Signalverarbeitung ist die näherungsweise Berechnung von Steigungen einer abgetasteten Funktion f . Wird diese etwa mit einer Schrittweite h in x -Richtung abgetastet, so kann man die Ableitung von f in einem Punkt x durch den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

annähern.

Zeigen Sie mit Hilfe von Taylorentwicklungen von f im Entwicklungspunkt x , dass der Fehler bei der Berechnung von $f'(x)$ mit der obigen Formel die Größenordnung $O(h^2)$ hat.

(8 Punkte)

Aufgabe 9

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} \arctan(x)$$

auf dem Intervall $[0, 1]$. Bestimmen Sie unter Rundung auf 4 Nachkommastellen den Fixpunkt von f , und prüfen Sie dazu die Gültigkeit der Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes.

(6 Punkte)