§27. KURVEN UND BOGENLÄNGE

27.1. Motivation

- Der Begriff der Kurve in der Ebene oder im Raum spielt eine wichtige Rolle in der Physik (Teilchenbahnen) und der Informatik (Computergrafik, Robotik).
- Zur Berechung der Länge von Kurven benötigt man Integrale.

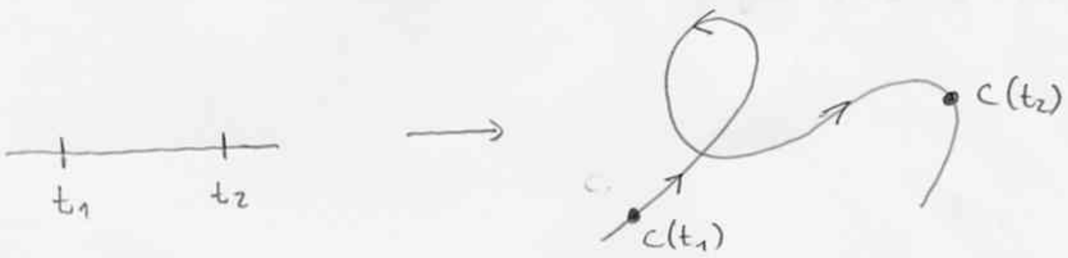
Um eine Kurve zu definieren, betrachten wir die Bewegung eines (punktförmigen) Teilchens im Raum, die durch die Angabe seines Ortes zur Zeit t beschrieben wird:

27.2. Def.:

Eine <u>(parametrisierte) Kurve</u> im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$c: \quad [a,b] \to \mathbb{R}^n, \qquad t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))^T := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

deren Komponentenfunktionen $x_1, \dots, x_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sind.
Eine Kurve c heißt <u>stetig differenzierbar</u> (<u>C^1-Kurve</u>), wenn alle x_i stetig differenzierbar sind.
Man definiert: $\dot{c}(t) := \left(\frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t) \right)^T$.
Das Bild $c([a,b])$ heißt <u>Spur</u> von c.



27.3. Bemerkungen:

a) Eine parametrisierte Kurve ist also eine vektorwertige Funktion einer Variablen.

b) Verschiedene Kurvenparametrisierungen können zur selben Spur führen:

Beispiel:

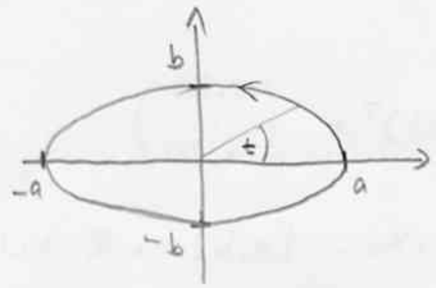
$c_1(t) := (\cos t, \sin t)^T, \quad t \in [0, 2\pi]$ 

$c_2(t) := (\cos t, -\sin t)^T, \quad t \in [0, 2\pi]$ 

haben den Einheitskreis als Spur, unterscheiden sich aber im Durchlaufsinn.

27.4. Beispiele

a) Ellipse mit Hauptachsen a und b



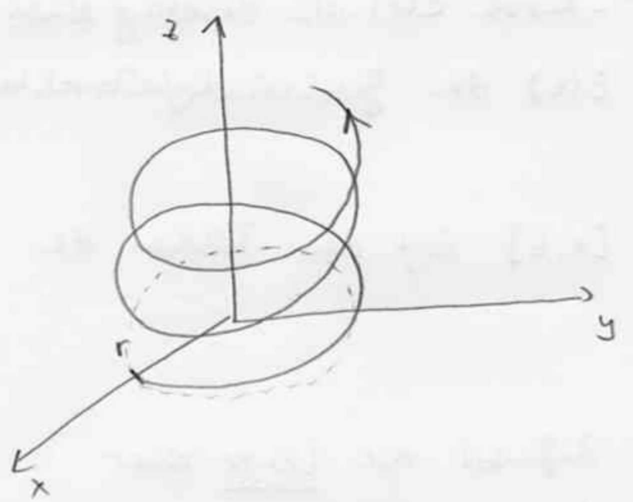
$$x(t) = a\cos t \qquad t \in [0, 2\pi]$$
$$y(t) = b\sin t$$

Aus $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ folgt die Spurgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Für $a = b = r$ ergibt sich ein Kreis mit Radius r.

b) Schraubenlinie



Überlagerung einer Kreisbewegung mit Radius r in der x-y-Ebene mit einer linearen Bewegung in z-Richtung:

$c(t) = (r\cos t,\ r\sin t,\ ht)^T, \quad t \in \mathbb{R}$

27.5. Def.:

Ist $c: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die „neue" Kurve $\tilde{c}(\tau) := c(h(\tau))$ mit $\tau \in [\alpha,\beta]$ die selbe Spur und den selben Durchlaufsinn wie c.
Man nennt $t = h(\tau)$ einen Parameterwechsel (Umparametrisierung).

Kurven, die durch einen Parameterwechsel auseinander hervorgehen, werden als gleich angesehen.
Ist c stetig differenzierbar, werden nur stetig differenzierbare Funktionen $h: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ mit $h'(\tau) > 0 \ \forall \tau \in [\alpha,\beta]$ als Parameterwechsel zugelassen (C^1-Parameterwechsel)

27.6. Länge einer Kurve

Interpretiert man eine C^1-Kurve $c(t)$ als Bewegung eines Teilchens so beschreibt die Ableitung $\dot{c}(t)$ den Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t.

Während des Zeitintervalls $[a,b]$ legt das Teilchen den Weg

$$L(c) = \int_a^b |\dot{c}(t)|\, dt$$

zurück. Dieses Integral definiert die Länge einer C^1-Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^m$.

27.7. Beispiel

Wir wollen den Umfang eines Kreises

$$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

mit Radius r berechnen.

$$L(c) = \int_0^{2\pi} |\dot{c}(t)|\, dt$$

Mit

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}$$

$$|\dot{c}(t)| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = \sqrt{r^2 (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1})} = r$$

erhält man

$$L(c) = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r \quad \checkmark$$

Warum ist die Kurvenlänge wichtig?

Mit Hilfe der Substitutionsregel kann man zeigen:

27.8. Lemma (Invarianz der Kurvenlänge)

Die Länge einer C^1-Kurve ändert sich nicht unter einer Umparametrisierung.

Betrachten wir nun die zurückgelegte Wegstrecke als Funktion der Zeit:

27.9. Def.: Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve.

Dann nennt man die Funktion

$$s(t) := \int_a^t |\dot{c}(\tau)| \, d\tau$$

die Bogenlängenfunktion von c.

Reparametrisiert man eine Kurve mit ihrer Bogenlänge, so nennt man dies Bogenlängenparametrisierung.

27.10. Beispiel

Betrachte Kreis mit Radius r und der Parametrisierung

$$c(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Mit $|\dot{c}(t)| = r$ (vgl. 27.7) lautet die Bogenlängenfunktion

$$s(t) = \int_0^t r \, d\tau = rt.$$

Somit hat der Kreis die Bogenlängenparametrisierung

$$c(s) = \begin{pmatrix} r \cos \frac{s}{r} \\ r \sin \frac{s}{r} \end{pmatrix}$$

27.11. <u>Bedeutung der Bogenlängenparametrisierung</u>

Bei Bogenlängenparametrisierung wird als „Zeit" der zurückgelegte Weg gewählt. Somit ist die Geschwindigkeit gleich 1:

$$|\dot{c}(s)| = 1.$$

Damit vereinfachen sich viele Formeln.

27.12. Def.: Für eine zweimal stetig differenzierbare Kurve $c(s)$ in Bogenlängenparametrisierung bezeichnet man den „Betrag der Beschleunigung" $|\ddot{c}(s)|$ als <u>Krümmung</u> $\varkappa$ von c

27.13. <u>Beispiel</u>

Kreis mit Radius r in Bogenlängenparametrisierung:

$$c(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \frac{s}{r} \\ r \sin \frac{s}{r} \end{pmatrix}$$

$$\dot{c}(s) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{s}{r} \\ \cos \frac{s}{r} \end{pmatrix}, \qquad \ddot{c}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r} \\ -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \end{pmatrix}$$

$$\varkappa = |\ddot{c}| = \sqrt{\frac{1}{r^2} \cos^2 \frac{s}{r} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \frac{s}{r}} = \frac{1}{r}$$

27.14. Bemerkung

Allgemein gilt:

Die Krümmung gibt den inversen Radius des Kreises an, der sich an der Stelle s an die Kurve c(s) anschmiegt (Schmiegekreis):

$\varkappa = \frac{1}{r}$