§26. NUMERISCHE VERFAHREN ZUR INTEGRATION

26.1. Motivation

Bei vielen Integralen findet man keine explizite Stammfunktion. Man ist daher auf numerische Verfahren, so genannte Quadraturformeln angewiesen.

Ges.: $I[f] := \int_a^b f(x)\,dx$ für Funktion f, die auf $[a,b]$ hinreichend oft differenzierbar ist.

Quadraturformeln führen dieses Integral in eine Summe über

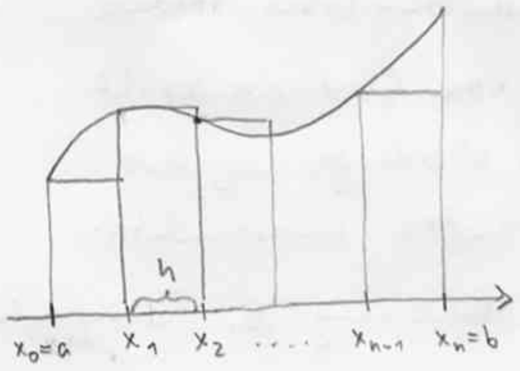
$$I[f] \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \qquad \text{Quadraturformel}$$

$x_i \in [a,b]$, $\quad i=0,\dots,n$: Knoten

w_i $\quad i=0,\dots,n$: Gewichte

Praktisch brauchbar sind Quadraturformeln mit nichtnegativen Gewichten. Sie garantieren Nichtnegativität der Integralapproximation für nichtnegative Funktionen sowie gutartiges Verhalten gegenüber Rundungsfehlern.

26.2. Einfaches Beispiel: Rechteckregel



$$\left.\begin{array}{l} x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n} \\ i=0,\dots,n \end{array}\right\} \text{Knoten}$$

$h = \frac{b-a}{n}$: Gitterweite

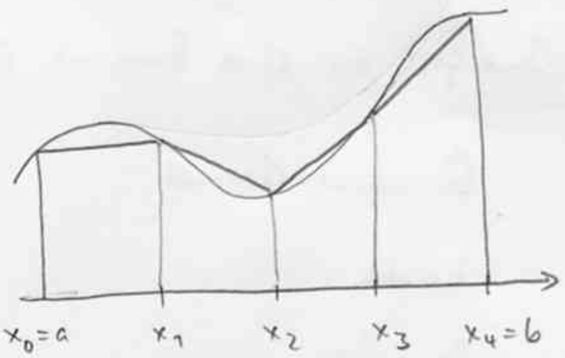
$$R_h[f] := \sum_{i=0}^{n-1} h f(x_i)$$

I.A. ist die Rechteckregel nicht sehr genau, solange man nicht sehr viele Knoten verwendet.

Grund: $f(x)$ wird im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ durch die Konstante $f(x_i)$ approximiert.

26.3. Zweiteinfachstes Beispiel: Trapezregel

Idee: Approximiere $f(x)$ im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ durch Gerade durch Punkte $(x_i, f(x_i))$ und $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$



Fläche aller Trapeze:

$$T_h[f] := \sum_{i=0}^{n-1} h \, \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

$$= \frac{h}{2} f(x_0) + h \left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) \right) + \frac{h}{2} f(x_n).$$

26.4. Bemerkung

Genauere Quadraturformeln erhält man, indem $f(x)$ stückweise durch Polynome höheren Grades ersetzt wird. (Newton-Cotes-Formeln). Eine Newton-Cotes-Formel vom Grad n integriert Polynome vom Grad $\leq n$ exakt. Für großes n ($n = 8$, $n \geq 10$) treten allerdings negative Gewichte auf, und die Formeln werden unbrauchbar. Gibt es bessere Alternativen zur Erhöhung der Genauigkeit?

Antwort: <u>Romberg-Quadratur</u>

Idee: Fehlerterme der Trapezregel sukzessive eliminieren.

Es gilt (Beweis aufwändig):

26.5. Satz <u>(Euler-Maclaurin'sche Summenformel)</u>

Für $f \in C^\infty[a,b]$ besitzt die Trapezregel die asymptotische Fehlerentwicklung

$$T_h[f] = \int_a^b f(x)\,dx + c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \ldots$$

mit Konstanten c_k, die von $f^{(2k-1)}(a)$ und $f^{(2k-1)}(b)$ abhängen.

26.6. <u>Konsequenz</u>

$$T_h[f] = \int_a^b f(x)\,dx + c_1 h^2 + c_2 h^4 + O(h^6)$$

$$T_{\frac{h}{2}}[f] = \int_a^b f(x)\,dx + c_1 \frac{h^2}{4} + c_2 \frac{h^4}{16} + O(h^6)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4\,T_{\frac{h}{2}}[f] - T_h[f]}{3} = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{4} c_2 h^4 + O(h^6)$$

Der quadratische Fehlerterm in h wurde also eliminiert, und das neue Verfahren ist von 4. Ordnung.

Ebenso kann man mit $T_h[f]$, $T_{h/2}[f]$, $T_{h/4}[f]$ die h^4-Terme eliminieren und erhält ein Verfahren 6. Ordnung!

Allgemein kann man zeigen:

26.7. Satz (Romberg-Quadratur)

Sei $f \in C^{2m+2}[a,b]$ und $T_h[f]$ die Trapezapproximation an $\int_a^b f(x)\,dx$ mit Schrittweite h.

Dann erhält man mit der Rekursionsformel

$$P_{k,0} := T_{h/2^k}[f] \qquad k = 0, 1, \ldots, m$$

$$P_{k,j} := \frac{4^j P_{k,j-1} - P_{k-1,j-1}}{4^j - 1} \qquad \begin{array}{l} j = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, m \end{array}$$

mit $P_{m,m}$ eine Quadraturformel der Fehlerordnung $2m+2$.

26.8. Veranschaulichung für $m = 3$

$$\begin{tikzcd}
T_h =: P_{0,0} \arrow[dr, "-1/3"] & & & \\
T_{h/2} =: P_{1,0} \arrow[r, "4/3"] \arrow[dr, "-1/3"] & P_{1,1} \arrow[dr, "-1/15"] & & \\
T_{h/4} =: P_{2,0} \arrow[r, "4/3"] \arrow[dr, "-1/3"] & P_{2,1} \arrow[r, "16/15"] \arrow[dr, "-1/15"] & P_{2,2} \arrow[dr, "-1/63"] & \\
T_{h/8} =: P_{3,0} \arrow[r, "4/3"] & P_{3,1} \arrow[r, "16/15"] & P_{3,2} \arrow[r, "64/63"] & P_{3,3}
\end{tikzcd}$$

Fehlerordnung:	2	4	6	8

Verfahrensmerkmale

- schrittweise Intervallhalbierung
- Werte aus vorangegangen Schritten werden weiter verwendet.
- Abbruch der Verfeinerung, falls Approximationen hinreichend dicht beieinander

26.9. Beispiel: $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$

h	Trapezregel	Romberg-Quadratur	Zahl der Funktionsauswertungen
1	0,92073 54924	0,92073 54924	2
1/2	0,93979 32848	0,94614 58824	3
1/4	0,94451 35217	0,94608 30041	5
1/8	0,94569 08636	0,94608 30704	9
1/16	0,94598 50299	0,94608 30704	17
⋮	⋮		⋮
1/32768	0,94608 30703		32769

Fazit: Bei vergleichbarer Genauigkeit hat die Romberg-Quadratur den Aufwand gegenüber der Trapezregel um den Faktor 2000 reduziert!