§25. UNEIGENTLICHE INTEGRALE

25.1. Motivation

Manchmal muss man Integrale berechnen,

- bei denen über ein unendliches Intervall integriert wird.

  Bsp.: $\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$

- bei denen unbeschränkte Funktionen vorliegen.

  Bsp.: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Solche Integrale heißen <u>uneigentliche Integrale</u>.

Unter welchen Bedingungen ist deren Berechnung möglich?

<u>Unendliche Integrationsgrenzen</u>

25.2. Def.:

Sei $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ über jedem Intervall $[a,R]$ mit $a < R < \infty$ integrierbar.

Falls $\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$ existiert, heißt $\int_a^\infty f(x)\,dx$ <u>konvergent</u>, und man setzt

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx.$$

Analog definiert man $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ für $f: (-\infty,b] \to \mathbb{R}$.

Ferner setzt man

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

25.3. Beispiele

a) Konvergiert $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ für $p > 1$?

$$\int_1^R \frac{dx}{x^p} \overset{24.5}{=} \frac{1}{1-p} \frac{1}{x^{p-1}} \Big|_1^R = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{R^{p-1}}\right)$$

Mit $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R^{p-1}} = 0$ folgt die Konvergenz von $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ für $p>1$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$$

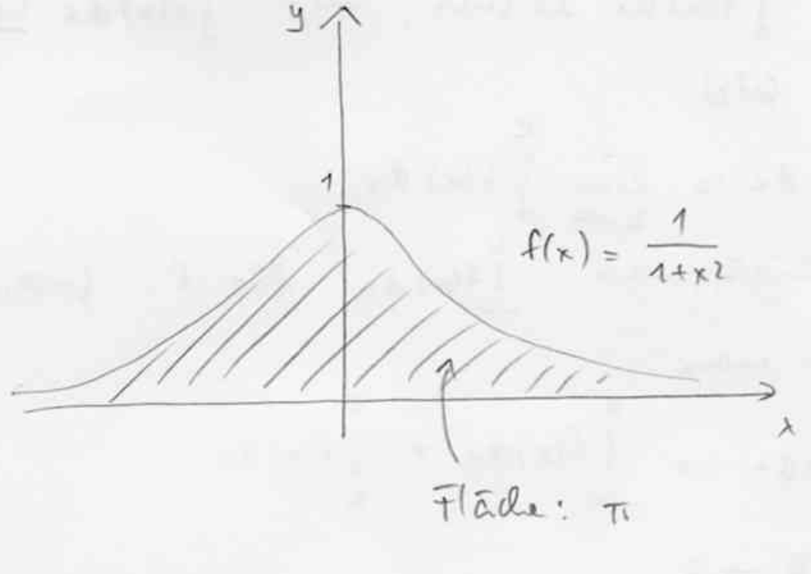
Bem.: Für $p \le 1$ ist $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ divergent

b)
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\overset{24.5}{=} \lim_{R\to\infty} \arctan x \Big|_{-R}^0 + \lim_{R\to\infty} \arctan x \Big|_0^R$$

$$= 0 - \lim_{R\to\infty} \arctan(-R) + \lim_{R\to\infty} \arctan R - 0$$

$$\overset{\S 17}{=} 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$



Integration unbeschränkter Funktionen

25.4. Def.:

Sei $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ über jedem Teilintervall $[a+\varepsilon, b]$ mit $0 < \varepsilon < b-a$ integrierbar und in a nicht definiert.

Falls $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ existiert, heißt $\int\limits_{a}^{b} f(x)$ konvergent, und man setzt

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

Eine analoge Def. gilt, falls $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ in b nicht definiert ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Falls $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ in a und b nicht definiert ist, setzt man

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

mit $c \in (a,b)$.

Falls Polstellen im Innern des Integrationsbereichs liegen, spaltet man das Integral so in Teilintegrale auf, dass die Polstellen an den Grenzen der Teilintegrale liegen.

25.5. Beispiel

Konvergiert $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ für $0 < p < 1$?

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\, x^{1-p} \Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-p}\left(1 - \varepsilon^{1-p}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{1-p} \quad \text{für } \varepsilon \to 0 \qquad \text{Konvergenz.}$$

Bem.: $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ konvergiert nicht für $p \geq 1$:

$p = 1$: $$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} \overset{24.5}{=} \ln|x| \Big|_\varepsilon^1 = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln \varepsilon$$

$$\longrightarrow \infty \quad \text{für } \varepsilon \to 0$$

$p > 1$: $$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\, \frac{1}{x^{p-1}} \Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{p-1}} - 1\right)$$

$$\longrightarrow \infty \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Für uneigentliche Integrale kann man ähnliche Konvergenzkriterien wie für Reihen zeigen (vgl. § 12):

25.6. Satz (Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale)

Sei $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ integrierbar auf jedem endlichen Intervall $[a,b]$. Dann gilt:

a) Cauchy-Kriterium

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ existiert

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists C > a: \quad \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \quad \forall z_1, z_2 > C.$$

b) Absolute Konvergenz

Ist $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergent (d.h. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ist absolut konvergent), so konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$

c) Majorantenkriterium

Ist $|f(x)| \le g(x)$ für alle $x \in [a,\infty)$ und konvergiert $\int_a^\infty g(x)\,dx$, so konvergiert $\int_a^\infty f(x)\,dx$ absolut.

Gilt umgekehrt $0 \le g(x) \le f(x)$ und divergiert $\int_a^\infty g(x)\,dx$, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Bem.: Entsprechende Aussagen gelten auch beim nach unten unbeschränkten Integrationsbereich $(-\infty, b]$, sowie an Singularitäten an den Enden eines beschränkten Intervalls $[a,b]$.

25.7. Beispiel: Das Dirichlet-Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

Cauchy-Kriterium ergibt für $0 < z_1 < z_2$:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin x}{x}\,dx \underset{\text{Int.}}{\overset{\text{part.}}{=}} -\frac{\cos x}{x} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin x}{x}\,dx \right| \le \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \int_{z_1}^{z_2} \frac{dx}{x^2}$$

$$\to 0 \quad \text{für } z_1 \to \infty$$

da $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ nach 25.3 konvergiert

Das Dirichlet-Integral tritt z.B. in der Signalverarbeitung auf (vgl. sinc-Funktion, Übungsaufgabe).

25.8. Beispiel: Die Gammafunktion (Euler, 1707 - 1783)

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt \quad \text{für } x > 0.$$

Konvergiert dieses Integral?

Probleme:

a) Für $0 < x < 1$ divergiert $e^{-t} t^{x-1}$ in $t = 0$.

b) Obere Integrationsgrenze ist ∞.

Wir spalten daher auf:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

und behandeln beide Probleme getrennt.

a) Betrachte $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,dt$ für $0 < x < 1$:

Wegen $0 \le e^{-t} \le 1$ hat $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,dt$ die nach 25.5 konvergente Majorante $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$.

b) Betrachte $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$.

Wir möchten dieses Integral durch die konvergente Majorante $c \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ abschätzen (vgl. 25.3 (a)). Hierzu muss gelten:

$$e^{-t} \le c \cdot t^{-x-1} \quad \text{für ein } c > 0.$$

Dies ist erfüllbar: Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Potenz (vgl. 17.4), gibt es ein $c > 0$ mit

$$\frac{t^{x+1}}{e^t} \le c \quad \forall t \ge 1$$

Somit ist $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$ konvergent.

Also ex. $\Gamma(x)$ für alle $x > 0$.

Zwei wichtige Eigenschaften der Gammafunktion:

i) $$\boxed{\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{R\to\infty} \left(-e^{-t}\right)\Big|_0^\infty = -0+1 = 1}$$

ii) $$\Gamma(x) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-t}}_{u} \underbrace{t^{x-1}}_{v'}\,dt$$

$$= \underbrace{e^{-t}\,\frac{1}{x}\,t^x\Big|_{t=0}^{t=\infty}}_{0} + \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t}\,t^x\,dt$$

$$= \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1)$$

d.h. $$\boxed{\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)}$$

Wegen (i) und (ii) interpoliert die Gammafunktion die Fakultät:

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$