§24. DAS UNBESTIMMTE INTEGRAL UND DIE STAMMFUNKTION

24.1. Motivation

- Gibt es eine Operation, die die Differentiation „rückgängig" macht?
- Gibt es einfache Regeln zur Berechnung von $\int_a^b f(x)\,dx$ ohne mühsames Hantieren mit Ober- und Untersummen und ihren Grenzwerten?

24.2. Def.:

Gegeben seien Funktionen $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$

Ist F differenzierbar auf $[a,b]$ und gilt

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b],$$

so nennt man F eine Stammfunktion (engl.: primitive (function)) von f.

Bem.: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F(x) + C$ mit einer beliebigen Konstante C Stammfunktion von $f(x)$.
Umgekehrt kann man zeigen, dass sich zwei Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ von $f(x)$ höchstens um eine Konstante unterscheiden.

Kommen wir nun zum Gipfel der Analysis:

24.3. **Satz** (<u>Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung</u>)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

a) $G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

(„Integration als Umkehrung der Differentiation")

b) Ist $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$, so gilt:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

(„Stammfunktion als Mittel zur Berechnung bestimmter Integrale")

<u>Beweis</u>:

a) Sei $h \neq 0$ ($h < 0$ ebenfalls zugelassen) so, dass $x, x+h \in [a,b]$.

$$\left| \frac{1}{h}\big(G(x+h) - G(x)\big) - f(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right) - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unabh. v. } t}}{f(x)}\,dt \right| \quad \text{(Def. von } G(x))$$

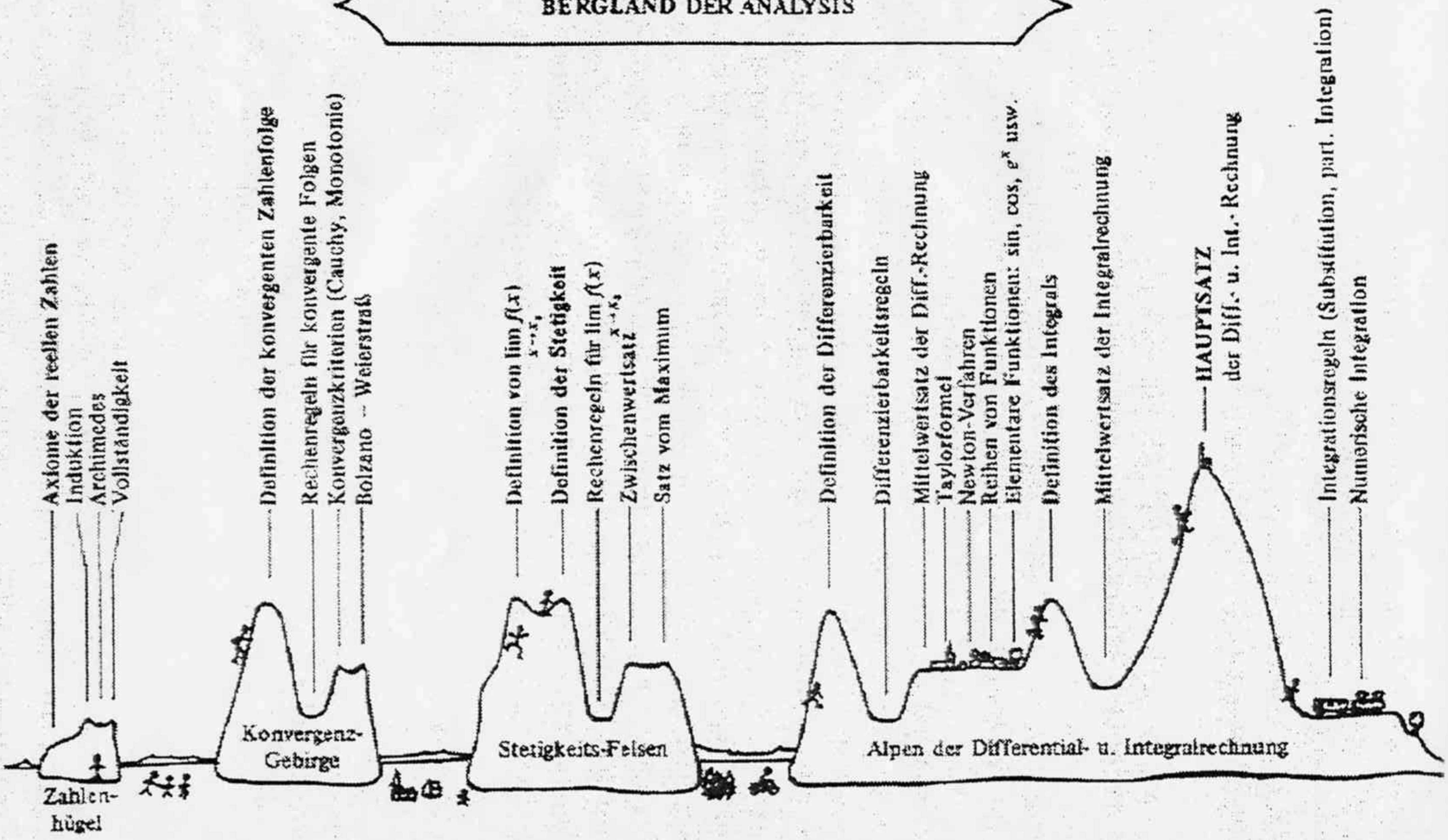
$$= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,dt \right|$$

$$= \big| f(\xi) - f(x) \big|$$ mit einem ξ zwischen x und $x+h$ (Integralmittel 23.17)

$\to 0$ für $h \to 0$, da f stetig.

Somit ist $G'(x) = f(x)$.

BERGLAND DER ANALYSIS



b) Mit (a) gilt für eine beliebige Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

Damit folgt:

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + C$$

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt + C = C$$

und somit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt. \qquad \square.$$

7/2/07

24.4. Def.: Die Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ wird auch als „das" <u>unbestimmte Integral</u> von $f(x)$ bezeichnet und $\int f(x)\,dx$ geschrieben (d.h. ohne Integrationsgrenzen).
Es ist jedoch nur bis auf eine additive Konstante C bestimmt.

24.5. Beispiele von unbestimmten Integralen

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C \qquad (\cos x \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C \qquad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C \qquad (x > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \qquad (|x| > 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \qquad (|x| \neq 1)$$

weitere Beispiele: Formelsammlungen, z.B.

Teubner-Taschenbuch der Mathematik.

Unbekannte Integrale berechnet man durch (z.T. trickreiche) Umformungen in bekannte Integrale.
Hierzu gibt es zwei Grundtechniken

24.6. Satz (Integrationsregeln)

a) Partielle Integration

Seien $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$

und für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx$$

b) Substitutionsregel

Zur Berechnung von $\int_c^d f(x)\, dx$ setze man $x = g(z)$ mit g stetig differenzierbar, $g(a) = c$, $g(b) = d$ und formal: $dx = g'(z)\, dz$:

$$\int_{x=c}^{x=d} f(x)\, dx = \int_{z=a}^{z=b} f(g(z))\, g'(z)\, dz .$$

Beweis:

a) Folgt aus der Produktregel der Differentiation:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b (uv)'\, dx}_{uv|_a^b} = \int_a^b u'v\, dx + \int_a^b v'u\, dx .$$

b) Folgt aus der Kettenregel: für $F' = f$:

$$\frac{d}{dt}\Big(F(g(z))\Big) = F'(g(z))\cdot g'(z) = f(g(z))\cdot g'(z)$$

nach Integration über z im Bereich $[a,b]$:

$$\int_a^b f(g(z))\, g'(z)\, dz = F(g(z))\Big|_a^b = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big)$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx \qquad \square$$

24.7. <u>Beispiele zur partiellen Integration</u>

a) $\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^x}_{v'}\, dx = x \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot e^x dx = x e^x - e^x + C$ ← nicht vergessen!

b) $\int \ln x\, dx = \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{\ln x}_{u}\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$$= x \ln x - x + C$$

c) $\int \sin^2 x\, dx = \int \underbrace{\sin x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'}\, dx$

$$= \sin x\,(-\cos x) + \int \cos^2 x\, dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\, dx \qquad \Big|\, + \int \sin^2 x\, dx$$

$$2\int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cos x + \int dx$$

$$\int \sin^2 x\, dx = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{x}{2} + C$$

24.8. Beispiele zur Substitutionsregel

a) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ Subst.: $z := \sqrt{x}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2z} \Rightarrow dx = 2z\,dz$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^{z}\cdot 2z\,dz$$

$$\overset{24.7(a)}{=} 2\left(ze^{z} - e^{z}\right) + C$$

$$= 2\left(\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right) + C$$

b) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ Subst.: $x = \cos z$

$$\frac{dx}{dz} = -\sin z \Rightarrow dx = -\sin z\,dz$$

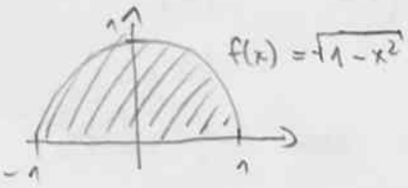
$$\int_{x=-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{z=\pi}^{z=0} \sqrt{1-\cos^2 z}\cdot(-\sin z)\,dz$$

$$= -\int_{\pi}^{0} \sin^2 z\,dz = \int_{0}^{\pi} \sin^2 z\,dz$$

$$\overset{24.7(c)}{=} -\frac{1}{2}\sin z\cos z + \frac{1}{2}z\,\Big|_0^{\pi}$$

$$= -0 + \frac{\pi}{2} - (-0+0) = \frac{\pi}{2}$$

Macht Sinn, denn dieses Integral beschreibt die Fläche einer Halbkreisscheibe mit Radius 1:



24.9. Bemerkung

Nicht alle Integrale lassen sich analytisch lösen, obwohl sie z. T. einfach aussehen.

Beispiel: „Fehlerfunktion" $\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

In Formelsammlungen tabelliert bzw. numerisch approximierbar.

24.10. Integration rationaler Funktionen

Integrale über rationale Funktionen führt man mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung auf bekannte Integrale zurück.

Beispiel: $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

Wegen $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{(A+B)x + (-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \qquad \Big| \cdot 3 \qquad &(1) \\ -3A - 2B &= 1 \qquad &(2) \end{aligned}$$

Addition des 3-fachen von (1) zu (2) ergibt:

$$B = 1$$

in (1): $A = -1$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = -\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3}$$

$$= -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C \qquad (x \neq 2 \text{ oder } 3).$$