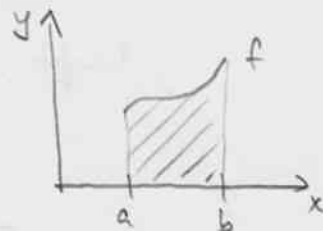


## §23: DAS BESTIMMTE INTEGRAL

23.1. Motivation

Sei  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  eine reellwertige Funktion

Ziel: Berechnung der Fläche zwischen  $f(x)$   
und der  $x$ -Achse



Annahme:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei beschränkt.

## 23.2. Def.:

a) Eine Menge  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  der Form

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

heißt Zerlegung (Partition, Unterteilung) des Intervalls  $[a, b]$ .

Die  $x_i$  heißen Knoten der Zerlegung.

b)  $\|Z\| := \max_{0 \leq i < n-1} |x_{i+1} - x_i|$  heißt Feinheit der Zerlegung  $Z$ .

c)  $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}[a, b]$ : Menge aller Zerlegungen von  $[a, b]$ .

d) Eine Zerlegung  $Z_1$  ist eine feinere Zerlegung als  $Z_2$   
( $Z_1 > Z_2$ , Verfeinerung), falls  $Z_1$  durch Hinzunahme  
weiterer Knoten zu  $Z_2$  entsteht.

Zerlegungen sind nützlich zur Summenberechnung:

## 23.3: Def.:

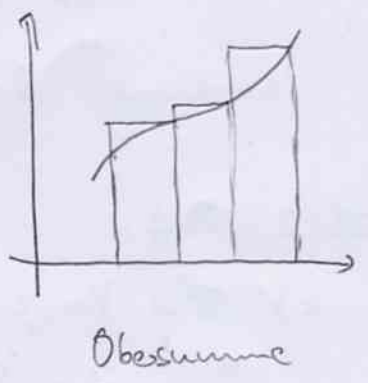
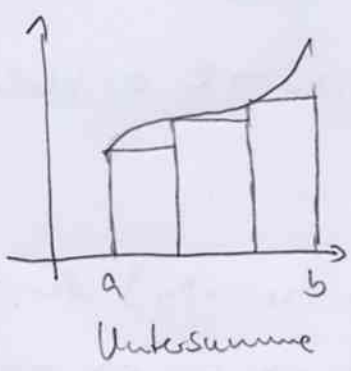
a) Jede Summe der Form

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

heißt Riemann-Summe von  $f$  zur Zerlegung  $Z$ .

b)  $U_f(z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \cdot (x_{i+1} - x_i)$   
 heißt Untersumme von  $f$  zur Zerlegung  $z$ .

c)  $O_f(z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \cdot (x_{i+1} - x_i)$   
 heißt Obersumme von  $f$  zur Zerlegung  $z$ .

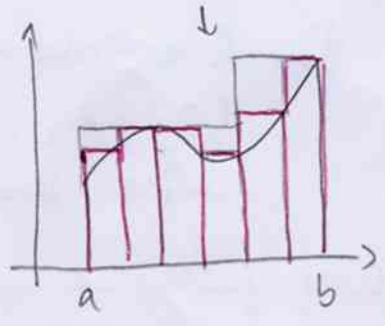
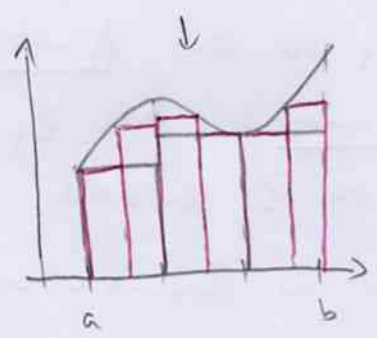


23.4. Bemerkungen

a) Für jedes feste  $z$  gilt:  $U_z(f) \leq R_z(f) \leq O_z(f)$ .

b) Verfeinerungen vergrößern Untersummen und verkleinern Obersummen:

$z_1 \supset z_2 \Rightarrow U_f(z_1) \geq U_f(z_2), \quad O_f(z_1) \leq O_f(z_2)$



c) Für zwei beliebige Zerlegungen  $z_1, z_2$  von  $[a, b]$  gilt stets

$U_f(z_1) \leq O_f(z_2)$

( $U_f(z_1)$  unterhalb,  $O_f(z_2)$  oberhalb der Kurve;  
 Untersummen nach oben, Obersummen nach unten  
 beschränkt)

23.5. Def.:

a) Aufgrund der obigen Eigenschaften existieren die Grenzwerte

$$\int_a^b f(x) dx := \sup_{Z \in \mathcal{Z}[a,b]} U_f(Z)$$

$$\int_a^b f(x) dx := \inf_{Z \in \mathcal{Z}[a,b]} O_f(Z)$$

Sie heißen Riemann'sches Ober- bzw. Untersintegral.

b)  $f(x)$  heißt (Riemann-) integrierbar über  $[a,b]$ , wenn Ober- und Untersintegral übereinstimmen. Dann heißt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

das (Riemann-)Integral von  $f(x)$  über  $[a,b]$ .

23.6. Beispiele

a) Sei  $f(x) = c = \text{const}$ .

$$\Rightarrow U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c (x_{i+1} - x_i) = c(b-a)$$

D.h.  $f(x)$  ist integrierbar mit  $\int_a^b f(x) dx = c(b-a)$ .

b) Sei  $\xi \in [a,b]$ . Dann ist

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \neq \xi) \\ 1 & (x = \xi) \end{cases}$$

integrierbar. Denn für jede Zerlegung  $Z$  gilt:

$$U_f(Z) = 0, \quad 0 < O_f(Z) \leq \|Z\| \quad (\text{Begründung?})$$

Also ist  $\int_a^b f(x) dx = 0$  (da  $\|Z\|$  beliebig klein gewählt werden kann).

c) Sei  $f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}) \\ 1 & (x \in [0,1] - \mathbb{Q}) \end{cases}$

Dirichlet'sche Sprungfkt.

Für jede Zerlegung  $Z$  ist

$$U_f(Z) = 0, \quad O_f(Z) = 1,$$

da wir in jedem Intervall  $[x_i, x_{i+1}]$  stets eine rationale und eine irrationale Zahl finden.

Somit ist  $f$  nicht Riemann-integrierbar.

(Es gibt jedoch allgemeinere Integrierbarkeitsbegriffe, z.B. Lebesgue-Integral, nach denen solche Funktionen integriert werden können)

Welche Eigenschaften hat das Riemann-Integral?

23.7. Def.: Ist  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine nichtnegative, integrierbare Funktion, so wird die Zahl  $\int_a^b f(x) dx$  als Fläche zwischen der Kurve  $f(x)$  und der  $x$ -Achse zwischen  $x=a$  und  $x=b$  bezeichnet.

23.8. Bemerkungen

a) Ist  $f$  negativ, so kann man die Fläche durch  $\int_a^b |f(x)| dx$  definieren.

b) Ist  $b < a$ , definiert man  $\int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx$ .

23.9. Lemma (Monotonie des Integrals)

(167)

Sind  $f$  und  $g$  integrierbar über  $[a, b]$  mit  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ , so gilt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Beweis: Zu jeder Zerlegung  $Z$  gilt:  $U_f(Z) \leq U_g(Z)$ ,  $O_f(Z) \leq O_g(Z)$ .

Diese Ungleichungen übertragen sich auf das Supremum (Untersummeintegral) bzw. Infimum (Obersummeintegral).  $\square$

23.10. Folgerung

Integration erhält die Nichtnegativität:  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$   
 $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0.$

Beweis: Lemma 23.9 angewandt auf  $f(x)$  und  $0$  ergibt:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b 0 dx = 0.$$

23.11. Folgerung

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Beweis: Mit Lemma 23.9 folgt aus  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

die Beziehung

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

und somit

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \underbrace{\int_a^b |f(x)| dx}_{\geq 0 \text{ nach 23.10}} = \int_a^b |f(x)| dx \quad \square$$

Ferner kann man zeigen:

### 23.12. Satz (Linearität der Integration)

Seien  $f(x)$ ,  $g(x)$  integrierbar über  $[a, b]$  sowie  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Dann ist auch  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Integrale lassen sich zerlegen:

### 23.13. Lemma (Zusammensetzung von Integrationsintervallen)

Ist  $a \leq c \leq b$ , so ist  $f$  genau dann über  $[a, b]$  integrierbar, wenn  $f$  über  $[a, c]$  und  $[c, b]$  integrierbar ist.

Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Beweis: Aussage folgt unmittelbar aus der Betrachtung von Ober- und Untersummen zu Zerlegungen, die  $c$  als Knoten enthalten (ggf. durch Verfeinerung erreichbar)  $\square$

Man kann zeigen, dass viele wichtige Funktionen integrierbar sind:

### 23.14. Satz (Integrierbarkeit monotoner oder stetiger Funktionen)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt, Dann gilt:

a) Ist  $f$  monoton, so ist  $f$  integrierbar.

b) Falls  $f$  stetig ist, ist  $f$  auch integrierbar.

23.15. Beispiele

Folgende Funktionen sind über einem Intervall  $[a, b]$  integrierbar:

a)  $f(x) = \sqrt{x}$  falls  $a \geq 0$

b)  $f(x) = e^x$

c)  $f(x) = \ln x$  falls  $a > 0$

d)  $f(x) = \sin x$

e) Polynomfunktionen:  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

f) Stückweise stetige Funktionen mit endlich vielen Sprungstellen  
(Induktionsbeweis über Zahl der Sprungstellen)

Bei der Differentialrechnung waren Mittelwertsätze sehr wichtig (vgl. §19). Es gibt Ähnliches für die Integralrechnung:

23.16. Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig und nichtnegativ.

Dann ex. ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$





