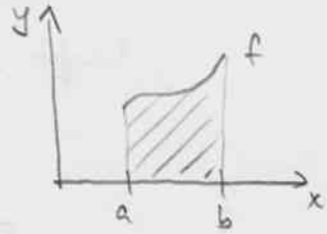
§23: DAS BESTIMMTE INTEGRAL

23.1. Motivation

Sei $f(x)$, $x \in [a,b]$ eine reellwertige Funktion

Ziel: Berechnung der Fläche zwischen $f(x)$ und der x-Achse



Annahme: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt.

23.2. Def.:

a) Eine Menge $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ der Form

$$Z = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$$

heißt Zerlegung (Partition, Unterteilung) des Intervalls $[a,b]$.
Die x_i heißen Knoten der Zerlegung.

b) $\|Z\| := \max\limits_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i|$ heißt Feinheit der Zerlegung Z.

c) $\mathfrak{Z} := \mathfrak{Z}[a,b]$: Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$.

d) Eine Zerlegung Z_1 ist eine feinere Zerlegung als Z_2 ($Z_1 \supset Z_2$, Verfeinerung), falls Z_1 durch Hinzunahme weiterer Knoten zu Z_2 entsteht.

Zerlegungen sind nützlich zur Summenberechnung:

23.3: Def:

a) Jede Summe der Form

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

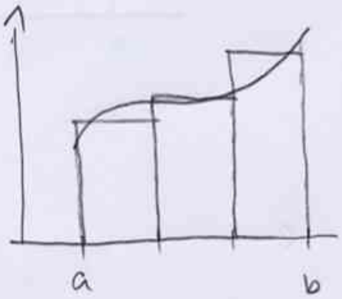
heißt Riemann-Summe von f zur Zerlegung Z.

b) $$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

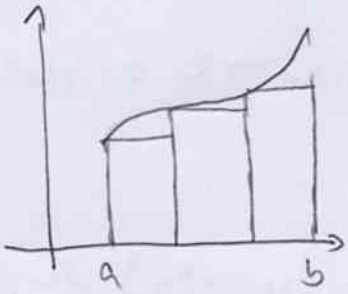
heißt <u>Untersumme</u> von f zur Zerlegung Z.

c) $$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \cdot (x_{n+1} - x_n)$$

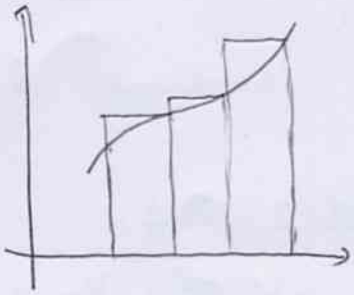
heißt <u>Obersumme</u> von f zur Zerlegung Z.



Riemann-Summe



Untersumme

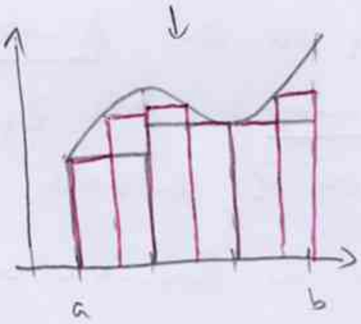

Obersumme

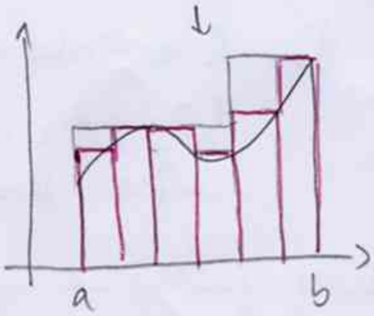
23.4. <u>Bemerkungen</u>

a) Für jedes feste Z gilt: $\quad U_Z(f) \le R_Z(f) \le O_Z(f)$.

b) Verfeinerungen vergrößern Untersummen und verkleinern Obersummen:

$$Z_1 \supset Z_2 \Rightarrow U_f(Z_1) \ge U_f(Z_2), \quad O_f(Z_1) \le O_f(Z_2)$$





c) Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a,b]$ gilt stets

$$U_f(Z_1) \le O_f(Z_2)$$

($U_f(Z_1)$ unterhalb, $O_f(Z_2)$ oberhalb der Kurve; Untersummen nach oben, Obersummen nach unten beschränkt)

23.5. Def:

a) Aufgrund der obigen Eigenschaften existieren die Grenzwerte

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_{Z \in \mathfrak{Z}[a,b]} U_f(Z)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_{Z \in \mathfrak{Z}[a,b]} O_f(Z).$$

Sie heißen Riemann'sches Ober- bzw. Unterintegral.

b) $f(x)$ heißt (Riemann-) integrierbar über $[a,b]$, wenn Ober- und Unterintegral übereinstimmen. Dann heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

das (Riemann-) Integral von $f(x)$ über $[a,b]$.

23.6. Beispiele

a) Sei $f(x) = c = \text{const}$.

$$\Rightarrow \quad U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c\,(x_{i+1} - x_i) = c\,(b-a).$$

D.h. $f(x)$ ist integrierbar mit $\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a)$.

b) Sei $\xi \in [a,b]$. Dann ist

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \neq \xi) \\ 1 & (x = \xi) \end{cases}$$

integrierbar. Denn für jede Zerlegung Z gilt:

$$U_f(Z) = 0, \qquad 0 < O_f(Z) \leq 2\,\|Z\| \quad \text{(Begründung?)}$$

Also ist $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ (da $\|Z\|$ beliebig klein gewählt werden kann).

c) Sei

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}) \\ 1 & (x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Dirichlet'sche Sprungfkt.

Für jede Zerlegung Z ist

$$U_f(Z) = 0, \qquad O_f(Z) = 1,$$

da wir in jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ stets eine rationale und eine irrationale Zahl finden.

Somit ist f nicht Riemann-integrierbar.

(Es gibt jedoch allgemeinere Integrierbarkeitsbegriffe, z.B. Lebesgue-Integral, nach denen solche Funktionen integriert werden können)

Welche Eigenschaften hat das Riemann-Integral?

23.7. Def.: Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative, integrierbare Funktion, so wird die Zahl $\int_a^b f(x)\,dx$ als Fläche zwischen der Kurve $f(x)$ und der x-Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ bezeichnet.

23.8. Bemerkungen

a) Ist f negativ, so kann man die Fläche durch $\int_a^b |f(x)|\,dx$ definieren.

b) Ist $b < a$, definiert man $\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$.

23.9. Lemma (Monotonie des Integrals)

Sind f und g integrierbar über $[a,b]$ mit $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Beweis: Zu jeder Zerlegung Z gilt: $U_f(Z) \le U_g(Z)$, $O_f(Z) \le O_g(Z)$.
Diese Ungleichungen übertragen sich auf das Supremum (Unterintegral) bzw. Infimum (Oberintegral). $\square$.

23.10. Folgerung

Integration erhält die Nichtnegativität: $f(x) \ge 0 \;\forall x \in [a,b]$
$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

Beweis: Lemma 23.9 angewandt auf $f(x)$ und 0 ergibt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b 0\,dx = 0.$$

23.11 Folgerung

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Beweis: Mit Lemma 23.9 folgt aus $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

die Beziehung

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

und somit

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \Bigg|\underbrace{\int_a^b |f(x)|\,dx}_{\ge 0 \text{ nach } 23.10}\Bigg| = \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad \square$$

Ferner kann man zeigen:

23.12. Satz (Linearität der Integration)

Seien $f(x)$, $g(x)$ integrierbar über $[a,b]$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dann ist auch $\alpha f(x) + \beta g(x)$ integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

Integrale lassen sich zerlegen:

23.13 Lemma (Zusammensetzung von Integrationsintervallen)

Ist $a \le c \le b$, so ist f genau dann über $[a,b]$ integrierbar, wenn f über $[a,c]$ und $[c,b]$ integrierbar ist.

Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Beweis: Aussage folgt unmittelbar aus der Betrachtung von Ober- und Untersummen zu Zerlegungen, die c als Knoten enthalten (ggf. durch Verfeinerung erreichbar) $\square$

Man kann zeigen, dass viele wichtige Funktionen integrierbar sind:

23.14. Satz (Integrierbarkeit monotoner oder stetiger Funktionen)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

a) Ist f monoton, so ist f integrierbar.

b) Falls f stetig ist, ist f auch integrierbar.

23.15. Beispiele

Folgende Funktionen sind über einem Intervall $[a,b]$ integrierbar:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ falls $a \geq 0$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = \ln x$ falls $a > 0$

d) $f(x) = \sin x$

e) Polynomfunktionen: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

f) Stückweise stetige Funktionen mit endlich vielen Sprungstellen
(Induktionsbeweis über Zahl der Sprungstellen)

Bei der Differentialrechnung waren Mittelwertsätze sehr wichtig (vgl. §19). Es gibt Ähnliches für die Integralrechnung:

23.16. Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und nichtnegativ.

Dann ex. ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx$$

Bem.: Für $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ kann

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

als Mittelwert von f im Intervall $[a,b]$ mit einer Gewichtsfunktion g angesehen werden.

<u>Beweis von Satz 23.16.</u>

Seien $m := \min_{x\in[a,b]} f(x)$, $M := \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

Da g nichtnegativ ist, gilt

$$m\cdot g(x) \le f(x)\,g(x) \le M\,g(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

und damit nach der Monotonieregel (Lemma 23.9):

$$m \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le M \int_a^b g(x)\,dx$$

Somit ex. eine Zahl $\mu \in [m,M]$ („Mittelwert“) mit

$$\mu \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

Da f stetig ist, ex. nach dem Zwischenwertsatz 16.10.(b) ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \mu$. Somit gilt

$$f(\xi) \int_a^b g(x) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx. \qquad \square$$

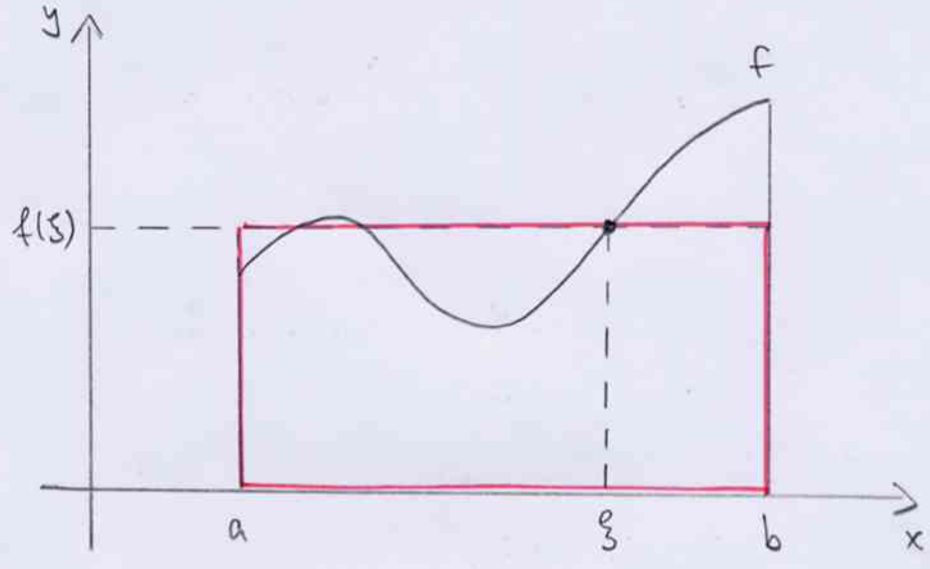
Mit $g(x) = 1 \quad \forall x \in [a,b]$ ergibt sich eine wichtige Folgerung, die oft auch schon als Mittelwertsatz der Integralrechnung bezeichnet wird.

23.17. Korollar (Integralmittel)

Für eine stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

23.18. Veranschaulichung



Fläche unter der Funktion stimmt mit der Rechtecksfläche $(b-a) \cdot f(\xi)$ überein:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)\,(b-a)$$