§22: BANACH'SCHER FIXPUNKTSATZ

22.1. Motivation

- Viele mathematische Probleme führen auf die Nullstellensuche von Funktionen (vgl. etwa Kurvendiskussion 21.20).
- Mit den Bisektionsverfahren 16.9 kennen wir bereits ein einfaches Verfahren hierzu.
- Für den Fall, dass wir das Problem umschreiben können auf die so genannte Fixpunktform

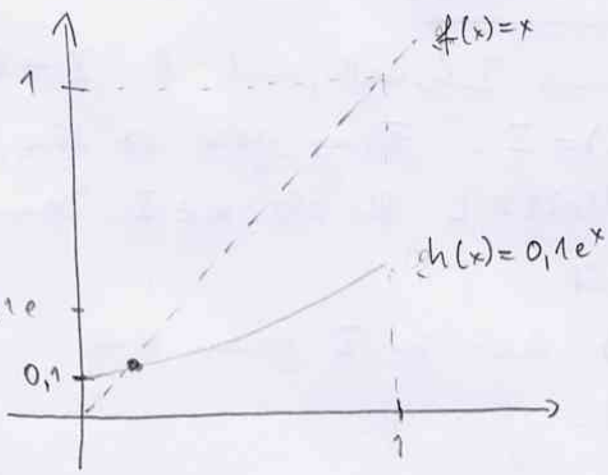
  $$x = f(x),$$

  bieten sich interessante Alternativen, die z.T. schneller konvergieren oder weitere Verallgemeinerungen haben. Dies wollen wir jetzt untersuchen.

22.2. Beispiel

Die Nullstellensuche von $g(x) = x - 0{,}1e^x$ führt auf

$$x = 0{,}1e^x$$



Im Intervall $[0,1]$ gibt es eine Nullstelle von g.

Probiert man den iterativen Ansatz

$$x_0^{(\,)} = 1$$
$$x_n^{(\,)} = 0{,}1\, e^{x_{n-1}} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

so erhält man bei achtstelliger Rechengenauigkeit

$$x_0^{(0)} = 1$$
$$x_1 = 0{,}2718282$$
$$x_2 = 0{,}1312362$$
$$x_3 = 0{,}1140237$$
$$x_4 = 0{,}1120779$$
$$x_5 = 0{,}1118600$$
$$x_6 = 0{,}1118356$$
$$x_7 = 0{,}1118329$$
$$x_8 = 0{,}1118326$$
$$x_9 = 0{,}1118326$$

Offenbar konvergiert das Verfahren recht schnell gegen die Lösung. Ist dies Zufall?

22.3. Satz (Banach'scher Fixpunktsatz)

Sei $I = [a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall, und $f: I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar mit $f(I) = I$. Ferner gebe es eine Konstante $L < 1$ mit $|f'(x)| \le L$ für alle $x \in I$. Dann gilt:

a) Existenz und Eindeutigkeit:
Die Gleichung $x = f(x)$ hat in I genau eine Lösung ξ („Fixpunkt").

b) Konvergenz:

Für beliebiges $x_0 \in I$ konvergiert das Iterationsverfahren

$$x_n = f(x_{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N}$$

gegen die Lösung ξ von $x = f(x)$.

c) A-priori-Fehlerabschätzung:

Aus den ersten beiden Approximationen x_0, x_1 kann man den Fehler von x_n abschätzen:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

d) A-posteriori-Fehlerabschätzung:

Mit den letzten beiden Approximationen x_{n-1}, x_n ergibt sich die (schärfere) Fehlerabschätzung

$$|\xi - x_n| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|.$$

Beweis:

(a), (b): Mit dem 1. Mittelwertsatz folgt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y| \qquad \forall x, y \in I.$$

Mit vollst. Induktion ergibt sich somit für die Folge (x_n) mit $x_n = f(x_{n-1})$:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq L |x_n - x_{n-1}| \leq \ldots \leq L^n |x_1 - x_0|. \qquad (*)$$

Daraus folgt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| \leq |x_1 - x_0| \sum_{L=0}^{\infty} L^n$$

Mit der geom. Reihe $\sum_{L=0}^{\infty} L^n = \frac{1}{1-L}$ (vgl. 12.4)

und dem Majorantenkriterium 12.7 (b) folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1} - x_k)$.

Wegen

$$x_{n+1} = (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \ldots + (x_1 - x_0) + x_0$$
$$= x_0 + \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k)$$

ist daher auch die Folge (x_n) konvergent.

Sei $\xi := \lim_{n\to\infty} x_n$. Da I abgeschlossen ist, ist $\xi \in I$.

Andererseits ist ξ auch Grenzwert der Folge $(x_{n+1}) = (f(x_n))$.

Da f differenzierbar ist, ist f auch stetig

Daraus folgt:

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{\text{stetig}}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(\xi),$$

d.h. ξ löst $x = f(x)$. („ξ ist Fixpunkt von f").

Ist ξ eindeutig?

Sei η ein weiterer Fixpunkt in I. Mit dem 1. Mittelwertsatz gilt dann

$$|\xi - \eta| \underset{\text{Fixp.}}{=} |f(\xi) - f(\eta)| \leq L\,|\xi - \eta| .$$

Wegen $L < 1$ ist dies nur erfüllbar, wenn $\xi = \eta$.

(c), (d): Sei $n \geq 1$. Für alle $m \geq n$ gilt:

$$x_{m+1} = (x_{m+1} - x_m) + (x_m - x_{m-1}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n) + x_n$$
$$= x_n + \sum_{k=n}^{m+1} (x_{k+1} - x_k)$$

Im Grenzübergang $m \to \infty$:

$$\xi - x_n = \sum_{k=n}^{\infty} (x_{k+1} - x_k) \overset{\text{Indexversch.}}{=} \sum_{p=1}^{\infty} (x_{n+p} - x_{n+p-1})$$

Mit $|x_{n+p} - x_{n+p-1}| \leq L^p |x_n - x_{n-1}|$ (vgl. (*)) und der geom. Reihe folgt:

$$|\xi - x_n| \underset{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \sum_{p=1}^{\infty} |x_{n+p} - x_{n+p-1}| \leq \sum_{p=1}^{\infty} L^p |x_n - x_{n-1}| \underset{\text{Reihe}}{\overset{\text{geom.}}{=}} \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| \overset{(*)}{\leq} \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| \qquad \square$$

22.4. Bemerkungen

a) Der Banach'sche Fixpunktsatz erfüllt alle Eigenschaften eines großartigen Satzes für die Informatik:

- Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung
- Ein konstruktiver, stets konvergenter Algorithmus
- Fehlerabschätzungen am Anfang und während des Programmlaufs

b) Das Beispiel 22.2 erfüllt die Voraussetzungen des Satzes:

- Mit $f(x) = 0{,}1\, e^x$ ist $f([0,1]) \subset [0,1]$.
- f ist diff'bar auf $[0,1]$.
- Wegen der Konvexität der e-Funktion gilt auf $[0,1]$

$$|f'(x)| = 0{,}1\, e^x \leq 0{,}1\, e^1 =: L < 1 \quad \left(\begin{array}{l}\text{Hier:} \\ L \approx 0{,}218\end{array}\right)$$

c) Falls die Kontraktionskonstante L kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, konvergiert das Fixpunktverfahren wegen der a-priori-Abschätzung 22.3. (c) schneller als das Bisektionsverfahren 16.10. Darüber hinaus kann es beispielweise auch auf vektorwertige Funktionen verallgemeinert werden. Da sie keine Ordnungsrel. zulassen, ist dort die Bisektion nicht einsetzbar.

d) Nullstellenprobleme lassen sich oft auf verschiedene Art als Fixpunktprobleme schreiben. Unterschiedliche Fixpunktiterationen haben evtl. unterschiedl. Konvergenzverhalten.

Bsp.: $f(x) = 2x - \tan x = 0$ kann man umformen zu

$$x = \frac{1}{2}\tan x \quad \text{oder} \quad x = \arctan(2x).$$