§21. GEOMETRISCHE BEDEUTUNG DER ABLEITUNG

21.1. Motivation

- Kann man aus den Ableitungen Aussagen über den Graphen einer Funktion gewinnen?
- Die Ableitungen liefern sogar sehr viele Aussagen: Monotonie, Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte.
- Diese Aussagen bilden die Grundlage der Kurvendiskussion und sind sehr wichtig bei Optimierungsproblemen.

21.2. Def.: Sei $I \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt <u>monoton wachsend</u>, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_2 > x_1$ gilt: $f(x_2) \geq f(x_1)$.

f ist <u>streng monoton wachsend</u>, wenn stets $f(x_2) > f(x_1)$ gilt.

Die Eigenschaften <u>monoton fallend</u> bzw. <u>streng monoton fallend</u> sind durch $f(x_2) \leq f(x_1)$ bzw. $f(x_2) < f(x_1)$ definiert.

21.3. Satz (<u>Monotonie differenzierbarer Funktionen</u>)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) f ist monoton wachsend (mon. fallend) in I

$\Leftrightarrow \quad f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$ in I.

b) $f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0)$ in I

$\Rightarrow$ f ist streng mon. wachsend (streng mon. fallend) in I.

Beweis:

a) „$\Rightarrow$": Sei f mon. wachsend und differenzierbar in I.

$$\Rightarrow \quad f(x+h) - f(x) \geq 0 \quad \text{für } h > 0$$
$$f(x+h) - f(x) \leq 0 \quad \text{für } h < 0$$

für alle $x, x+h \in I$.

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \quad \forall h \neq 0 \text{ mit } x+h \in I$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) \geq 0.$$

Analog zeigt man $f'(x) \leq 0$ für f mon. fallend.

„$\Leftarrow$". Sei $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$. Sei $h > 0$ und $\xi, \xi+h \in I$.

Nach dem 1. Mittelwertsatz ex. $\Theta \in (0,1)$ mit

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = f'(\xi + \Theta h)$$

Wegen $f'(\xi+\Theta h) \geq 0$ und $h > 0$ gilt:

$$f(\xi+h) \geq f(\xi)$$

d.h. f ist mon. wachsend.

Den Fall $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ zeigt man analog.

b) wie (a) „$\Leftarrow$".

$\square$

21.4. Beispiele

a) Bestimme das Monotonieverhalten von $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+3}$.

$$f'(x) = \frac{(x^2+2x+3)\cdot 1 - (2x+2)x}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{-x^2+3}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Nenner > 0.

$f'(x) \geq 0$ für $3-x^2 \geq 0$ d.h. $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

$f'(x) \leq 0$ für $3-x^2 \leq 0$ d.h. $x \leq -\sqrt{3}$ oder $x \geq \sqrt{3}$

Also ist $f(x)$ monoton wachsend in $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ und monoton fallend in $(-\infty, -\sqrt{3}]$, und $[\sqrt{3}, \infty)$.

Für $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ gilt sogar $f'(x) > 0$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ streng monoton wachsend in $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

b) Die Umkehrung von Satz 21.3.(b) gilt nicht!

Bsp.: $f(x) = x^3$ ist streng mon. wachsend auf $\mathbb{R}$, aber $f'(0) = 0$.

Die folgenden Begriffe sind wichtig bei Optimierungsproblemen:

21.5. Def.: Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt <u>konvex</u> auf $I \subset \mathbb{R}$, wenn für alle $a, b \in I$ und $\theta \in (0,1)$ gilt:

$$f(\theta a + (1-\theta) b) \leq \theta f(a) + (1-\theta) f(b).$$

gilt statt dessen

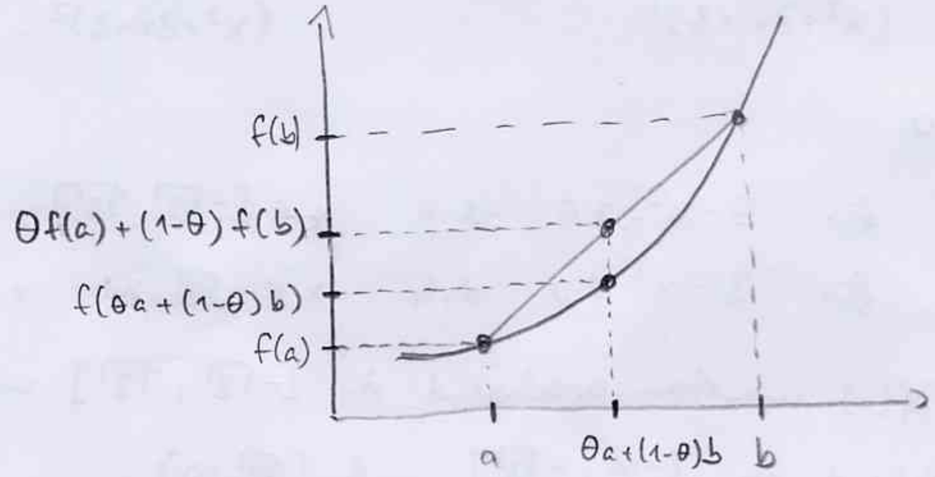
$$f(\theta a + (1-\theta) b) \geq \theta f(a) + (1-\theta) f(b),$$

so heißt f <u>konkav</u>.

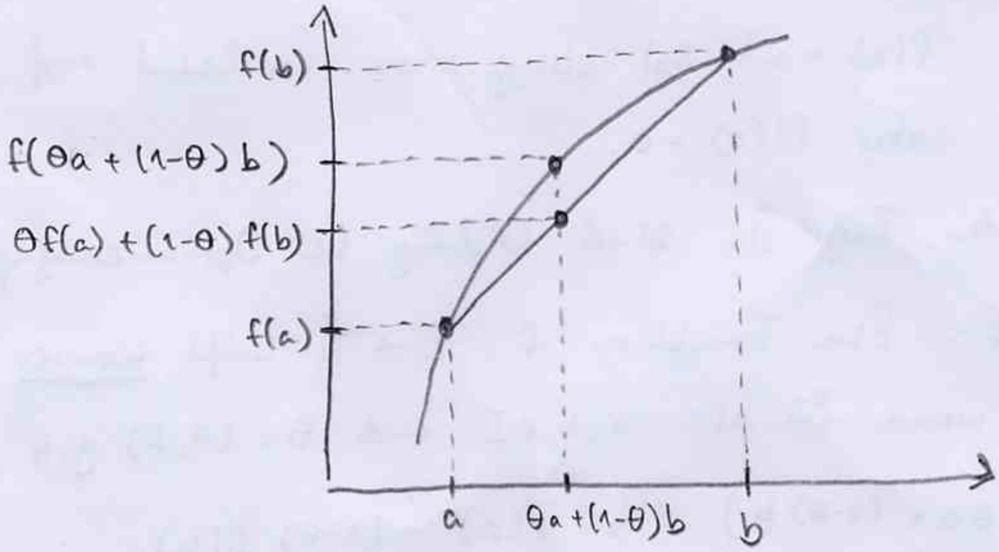
Gilt $<$ statt $\leq$ (bzw. $>$ statt $\geq$), so heißt f <u>streng konvex</u> (bzw. <u>streng konkav</u>).

21.6. Veranschaulichung

Konvexe Funktionen verlaufen unterhalb ihrer Sekanten und weisen eine Linkskrümmung auf:



Konkave Funktionen verlaufen oberhalb ihrer Sekanten und weisen eine Rechtskrümmung auf:



Damit ist anschaulich klar:

21.7. Satz (Konvexität / Konkavität von C^1-Funktionen)

Sei $f \in C^1(I)$. Dann gilt:

a) f ist in I konvex $\Leftrightarrow$ f' in I mon. wachsend

b) f ist in I konkav $\Leftrightarrow$ f' in I mon. fallend.

Aus Satz 21.3 und 21.7 folgt sofort

21.8. Satz (Konvexität / Konkavität von C^2-Funktionen)

Sei $f \in C^2(I)$. Dann gilt:

a) f ist in I konvex. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ in I.

$f''(x) > 0$ in I $\Rightarrow$ f ist in I streng konvex.

b) f ist in I konkav $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ in I.

$f''(x) < 0$ in I $\Rightarrow$ f ist in I streng konkav.

21.9. Beispiele

a) Typische konvexe Funktionen:

$f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2x$ mon. wachsend

$g(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$: $g'(x) = e^x$ " "

Wegen $f''(x) = 2 > 0$ und $g''(x) = e^x > 0$ sind f und g sogar streng konvex auf $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \ln x$ ist streng konkav für $x > 0$:

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ $\forall x > 0$.

Lokale Extrema spielen eine wichtige Rolle bei Funktionen:

21.10. Def.: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ξ ein innerer Punkt in I (kein Randpunkt!)

ξ heißt <u>lokales Maximum</u> von f in I, falls ein $\varepsilon > 0$ ex. mit

$$|x - \xi| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(\xi).$$

Gilt hingegen

$$|x - \xi| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(\xi),$$

so heißt ξ lokales Minimum von f in I.

Gilt Gleichheit nur im Punkt ξ, so liegt ein <u>strenges lokales Maximum</u> bzw. <u>strenges lokales Minimum</u> vor.

Wie findet man solche Extrema?

21.11. Satz (<u>Notwendige Bedingung für lokale Extrema</u>)

Sei f in ξ differenzierbar und habe dort ein lokales Extremum (d.h. lokales Max. oder lok. Min.). Dann ist $f'(\xi) = 0$.

<u>Beweis:</u> Sei ξ ein lokales Maximum.

$$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0: \quad |x - \xi| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(\xi)$$

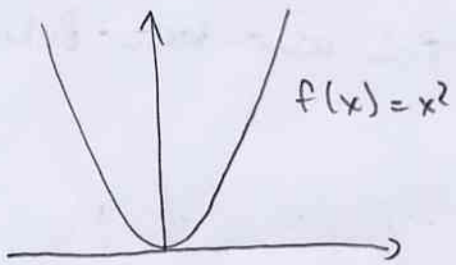
Falls $x > \xi$: $\quad \dfrac{\overbrace{f(x) - f(\xi)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - \xi}_{> 0}} \leq 0 \qquad (*)$

Falls $x < \xi$: $\quad \dfrac{\overbrace{f(x) - f(\xi)}^{\le 0}}{\underbrace{x - \xi}_{< 0}} \ge 0 \qquad (**)$

Da f in ξ differenzierbar ist, ex. eindeutiger Grenzwert für $x \to \xi$. Wegen $(*)$ und $(**)$ ist $f'(\xi) = 0$.

21.12. <u>Beispiele</u>

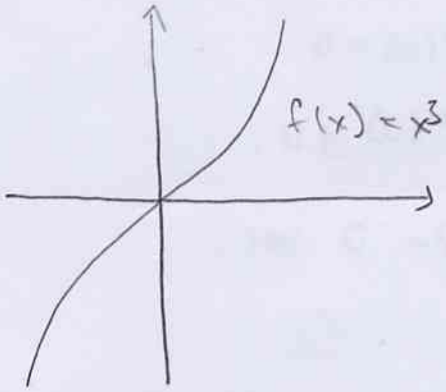
a)



$f(x) = x^2$ hat in $\xi = 0$ ein lok. Minimum.

Wegen $f'(x) = 2x$ ist $f'(0) = 0$.

b) Die Umkehrung von Satz 21.11 gilt <u>nicht</u>!



Für $f(x) = x^3$ gilt $f'(x) = 3x^2$ und somit $f'(0) = 0$.
Dennoch liegt in $\xi = 0$ kein lokales Extremum vor.

24/1/07

Satz 21.11 liefert somit nur eine <u>notwendige</u> Bedingung für Extrema, die jedoch nicht <u>hinreichend</u> ist. Benötigt man hinreichende Aussagen, kann man den folgenden Satz zeigen:

21.13. Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f \in C^n(I)$, $n \geq 2$, ξ innerer Punkt von I, und es gelte:

$f'(\xi) = f''(\xi) = \ldots = f^{(n-1)}(\xi) = 0$ und $f^{(n)}(\xi) \neq 0$.

Dann gilt:

a) Ist n gerade, so liegt ein lokales Extremum vor.
Für $f^{(n)}(\xi) > 0$ ist es ein strenges lok. Minimum,
für $f^{(n)}(\xi) < 0$ ein strenges lok. Maximum.

b) Für ungerades n handelt es sich um kein Extremum.

21.14. Beispiele

a) Für $f(x) = x^3$ gilt:

$$f'(x) = 3x^2 \qquad f'(0) = 0$$
$$f''(x) = 6x \qquad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = 6 \qquad f'''(0) \neq 0.$$

Also liegt kein Extremum in 0 vor.

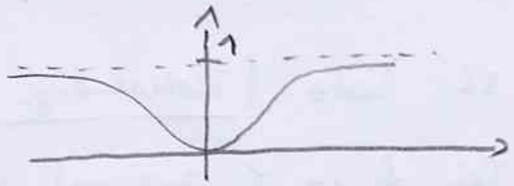
b) Für $f(x) = x^4$ gilt:

$$f'(x) = 4x^3 \qquad f'(0) = 0$$
$$f''(x) = 12x^2 \qquad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = 24x \qquad f'''(0) = 0$$
$$f^{(4)}(x) = 24 \qquad f^{(4)}(0) > 0.$$

Somit liegt in 0 ein strenges Minimum vor.

c) Es gibt Fälle, in denen Satz 21.13 nicht anwendbar ist, z.B. ...)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$



Induktiv kann man nachprüfen:

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Obwohl in 0 ein strenges lok. Minimum vorliegt, ist Satz 21.13 nicht anwendbar.

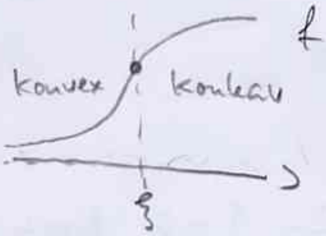
Er liefert somit nur eine hinreichende Bedingung für strenge lokale Extrema. Sie ist jedoch nicht notwendig.

21.15. Def.: Eine in ξ differenzierbare Funktion $f(x)$ hat einen Wendepunkt in ξ, falls $f'(x)$ in ξ ein lokales Extremum hat.

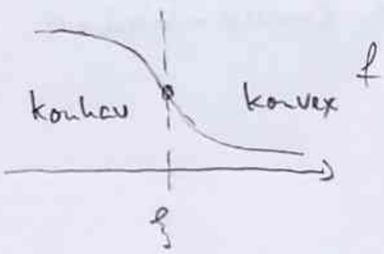
21.16. Bemerkungen:

a) Im Wendepunkt wechselt das Krümmungsverhalten:

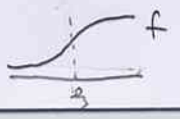
- Hat $f'(x)$ in ξ ein lok. Maximum, so ist f' in einer Umgebung links von ξ mon. wachsend und rechts von ξ mon. fallend.
  (Konvex-Konkav-Wechsel)

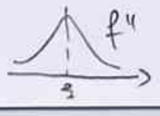


- Hat $f'(x)$ in ξ ein lok. Minimum, liegt ein Konkav-Konvex-Wechsel vor.



b) In der Signalverarbeitung beschreiben Wendepunkte die Lokalisierung von Kanten.



$\Rightarrow$


Analog zu Satz 21.11 und 21.12 gibt es notwendige und hinreichende Kriterien für Wendepunkte:

21.17. Satz (Notwendige Bedingung für Wendepunkte)

Sei f in ξ zweimal differenzierbar und habe dort einen Wendepunkt. Dann ist $f''(\xi) = 0$.

21.18. Satz (Hinreichende Bedingung für Wendepunkte)

Sei $f \in C^{n+1}(I)$, $n \geq 2$, ξ innerer Punkt von I, mit

$$f''(\xi) = \dots = f^{(n)}(\xi) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n+1)}(\xi) \neq 0.$$

Dann gilt:

a) Ist n gerade, liegt in ξ ein Wendepunkt vor:
Für $f^{(n+1)}(\xi) > 0$ ist es ein Konkav-Konvex-Wechsel,
für $f^{(n+1)}(\xi) < 0$ ein Konvex-Konkav-Wechsel

b) Ist n ungerade, liegt in ξ kein Wendepunkt vor.

21.19. Beispiel

a) Für $f(x) = x^3$ gilt:

$$f'(x) = 3x^2 \qquad f'(0) = 0$$
$$f''(x) = 6x \qquad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = 6 \qquad f'''(0) > 0.$$

In $\xi = 0$ liegt daher ein Wendepunkt mit Konkav-Konvex-Wechsel vor.

21.20 Kurvendiskussion

Ziel einer Kurvendiskussion ist die Feststellung des qualitativen und quantitativen Verhaltens des Graphen einer Funktion $f(x)$

Hierzu gehören typischerweise folgende Untersuchungen:

a) Maximaler Definitionsbereich

Bsp.: $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}$

hat Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Symmetrien

- $f(x)$ ist symmetrisch zur y-Achse (gerade Funktion), falls $f(-x) = f(x) \quad \forall x$.

  Bsp.: $f(x) = \cos x$ ist gerade Funktion.

- $f(x)$ ist symmetrisch zum Ursprung (ungerade Fkt.) falls $f(-x) = -f(x) \quad \forall x$.

c) Polstellen

Hat $f(x)$ die Form $f(x) = \dfrac{g(x)}{(x-\xi)^k}$ mit $g(x)$ stetig in ξ und $g(\xi) \neq 0$, so besitzt $f(x)$ in ξ

- für ungerades k einen Pol mit Vorzeichenwechsel
- für gerades k einen Pol ohne Vorzeichenwechsel.

Bsp.: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-4}{x^2}$ hat in $\xi = 0$

einen Pol ohne Vorzeichenwechsel.

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Linksseitiger Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

d) Verhalten im Unendlichen

Bestimme $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ falls existent.

Untersuchung auf Asymptoten:

Eine Gerade $y = ax + b$ heißt Asymptote von $f(x)$

für $x \to \pm\infty$, falls $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ gilt.

a und b werden bestimmt durch

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax).$$

Bsp.:

$$f(x) = \frac{2x^2+3x-4}{x^2}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2+3x-4}{x^3} = 0 \\ b) &= \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \end{aligned}\right\} \quad y = 2 \text{ ist Asymptote}$$

e) Nullstellen

können bei Polynomen vom Grad ≤ 4 analytisch bestimmt werden. Ansonsten muss man „raten" oder numerische Verfahren (z.B. Bisektionsverfahren 16.9; weitere Verfahren folgen) verwenden

Bsp.: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-4}{x^2}$

$$2x^2+3x-4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+32}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$x_1 \approx -2{,}35 \qquad x_2 \approx 0.85$$

f) Extrema, Monotonieintervalle

Bsp.: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-4}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{x^2(4x+3) - 2x(2x^2+3x-4)}{x^4}$$

$$= \frac{-3x^2+8x}{x^4} = \frac{8-3x}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \iff x_3 = \frac{8}{3}.$$

$$f\left(\tfrac{8}{3}\right) \approx 2{,}56$$

$$f''(x) = \frac{x^3(-3) - 3x^2(8-3x)}{x^6} = \frac{6x^3-24x^2}{x^6} = \frac{6x-24}{x^4}$$

$f''\left(\frac{8}{3}\right) < 0 \Rightarrow f$ hat in $x_3 = \frac{8}{3}$ lok. Max.

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } \frac{8}{3} < x < \infty \quad \text{(streng mon. fallend)} \\ > 0 & \text{für } 0 < x < \frac{8}{3} \quad \text{(str. mon. wachsend)} \\ < 0 & \text{für } -\infty < x < 0 \quad \text{(str. mon. fallend)} \end{cases}$$

g) Wendepunkte

Bsp.: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-4}{x^2}$

$0 = f''(x) = \dfrac{6x-24}{x^4} \Rightarrow x_4 = 4 \quad f(4) = \frac{5}{2}$

$f'''(x) = \dfrac{x^4 \cdot 6 - 4x^3(6x-24)}{x^8} = \dfrac{-18x^4+96x^3}{x^8} = \dfrac{96-18x}{x^5}$

$f'''(4) > 0: \Rightarrow$ Konkav-Konvex-Wechsel

h) Skizze

im Beispiel