§ 20. DER SATZ VON TAYLOR

20.1. Motivation

- Für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ stellt die Tangente

$$t(x) = f(\xi) + (x-\xi) f'(\xi)$$

eine lokale Approximation durch ein Polynom 1. Grades im Punkt ξ dar. Es gilt: $t(\xi) = f(\xi)$, $t'(\xi) = f'(\xi)$.

- Ist es möglich, $f(x)$ in ξ durch ein Polynom höheren Grades zu approximieren, falls f eine höhere Differenzierbarkeitsordnung besitzt?

20.2. Satz (Satz von Taylor)

Sei $\xi \in (a,b)$ und $f \in C^{m+1}[a,b]$.

Dann besitzt $f(x)$ folgende Taylorentwicklung um ξ:

$$f(x) = T_m(x,\xi) + R_m(x,\xi)$$

mit dem Taylorpolynom m-ten Grades

$$T_m(x,\xi) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

und dem Restglied nach Lagrange

$$R_m(x,\xi) = \frac{(x-\xi)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi + \theta(x-\xi))$$

mit $\theta \in (0,1)$.

<u>Beweis:</u> Betrachte $g(x) := f(x) - T(x)$ mit $T(x) := T_m(x,\xi)$.

Dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} g(\xi) &= f(\xi) - T(\xi) \\ &= f(\xi) - f(\xi) = 0 \\ g'(\xi) &= f'(\xi) - T'(\xi) \\ &= f'(\xi) - f'(\xi) = 0 \\ &\vdots \\ g^{(m)}(\xi) &= f^{(m)}(\xi) - f^{(m)}(\xi) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Funktion und Taylorpolynom haben gleiche k-te Ableitungen in ξ für $k = 0, \ldots, m$.

Nun wenden wir den 2. Mittelwertsatz auf $\dfrac{g(x)}{(x-\xi)^{m+1}}$ an:

$\exists\ \xi_1$ zwischen ξ und x mit

$$\frac{g(x)}{(x-\xi)^{m+1}} = \frac{g(x) - \overset{0}{\widetilde{g(\xi)}}}{(x-\xi)^{m+1} - (\xi-\xi)^{m+1}} \overset{2.\,MWS}{=} \frac{g'(\xi_1)}{(m+1)(\xi_1-\xi)^m}$$

Induktiv folgt:

$$\frac{g(x)}{(x-\xi)^{m+1}} = \frac{g'(\xi_1)}{(m+1)(\xi_1-\xi)^m} = \frac{g''(\xi_2)}{(m+1)m(\xi_2-\xi)^{m-1}} = \ldots$$

$$= \frac{g^{(m)}(\xi_m)}{(m+1)!\,(\xi_m-\xi)} = \frac{g^{(m+1)}(\xi_{m+1})}{(m+1)!}$$

mit ξ_k zwischen ξ und x für $k = 1, \ldots, m+1$.

Mit $g(x) = f(x) - T_m(x,\xi)$ folgt also

$$f(x) - T_m(x,\xi) = \frac{(x-\xi)^{m+1}}{(m+1)!}\, g^{(m+1)}(\xi_{m+1}).$$

Wegen $g^{(m+1)}(x) = f^{(m+1)}(x)$ ist daher

$$f(x) = T_m(x,\xi) + \frac{(x-\xi)^{m+1}}{(m+1)!}\, f^{(m+1)}(\xi_{m+1})$$

mit ξ_{m+1} zwischen ξ und x. $\square$

20.3. Bemerkungen

a) Für $m = 0$ erhält man den ersten Mittelwertsatz.

b) Man kann sogar zeigen, dass $T_m(x, \xi)$ das einzige Polynom vom Grad $\leq m$ ist, das die Approximationsgüte $O((x-\xi)^{m+1})$ besitzt.

c) Neben der Restglieddarstellung nach Lagrange gibt es noch andere Darstellungen des Restglieds.

20.4. Beispiele

a) Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion um $\xi = 0$:

Aus
$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi + \theta(x-\xi))$$
folgt mit $\xi = 0$ und $\frac{d^k}{dx^k} e^x = e^x$:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \underbrace{\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} e^{\theta x}}_{R_m(x,0)} \quad \text{mit } 0 < \theta < 1$$

Für $0 \leq x \leq 1$ hat man beispielsweise die Fehlerabschätzung
$$|R_m(x,0)| \leq \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} e^{\theta x} \leq \frac{1}{(m+1)!} e$$

Hieraus folgt z.B. für $m = 10$:
$$|R_{10}(x,0)| \leq \frac{1}{11!} \cdot e \approx 6{,}81 \cdot 10^{-8}$$

b) Taylor-Entwicklung der Sinusfunktion um $\xi = 0$

Mit $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

und $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ folgt, dass $T_m(x, 0)$

keine geraden Potenzen in x enthält:

$$\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x \qquad \cos 0 = 1$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (\sin x) = -\sin x \qquad -\sin 0 = 0$$

$$\frac{d^3}{dx^3} (\sin x) = -\cos x \qquad -\cos 0 = -1$$

$$\frac{d^4}{dx^4} (\sin x) = \sin x \qquad \sin 0 = 0$$

$$\frac{d^5}{dx^5} (\sin x) = \cos x \qquad \cos 0 = 1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Damit gilt:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (\sin x) \Big|_{x=0} + R_{2n+2}(x, 0)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x, 0)$$

mit

$$R_{2n+2}(x, 0) = (-1)^{n+1} \frac{\cos(\theta x)}{(2n+3)!} x^{2n+3} , \qquad 0 < \theta < 1 .$$

Für $|x| \leq 1$ und $n = 3$ folgt beispielsweise:

$$|R_8(x, 0)| \leq \frac{1}{9!} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-6}$$

20.5. Def.: Für eine C^∞-Funktion f bezeichnet man die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

als Taylorreihe um den Entwicklungspunkt ξ.

20.6. Bemerkungen

a) Die Taylorreihe muss i. A. nicht konvergieren.

b) Konvergiert sie, so muss sie nicht gegen $f(x)$ konvergieren.

c) Ist dies jedoch der Fall, so dass also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

für alle $x \in (a,b)$ gilt, so heißt f reell-analytisch (C^ω-Funktion) auf (a,b).

d) Die Taylorreihe einer C^∞-Funktion f mit Entwicklungspunkt ξ konvergiert in x genau dann gegen $f(x)$, wenn $\lim_{m\to\infty} R_m(x,\xi) = 0$.

20.7. Beispiele

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist die Taylorreihe zur Exponentialfunktion mit Entwicklungspunkt $\xi = 0$.

Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen e^x.

Allgemein gilt: Existiert eine Potenzreihendarstellung, so ist dies die Taylorreihe

b) Die Binomialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ ist die Taylorreihe zu $(1+x)^\alpha$ im Entwicklungspunkt $\xi = 0$.
Sie hat den Konvergenzradius $r = 1$ (vgl. 15.11).

c)
$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

ist aus $C^\infty(\mathbb{R})$.

Nachrechnen zeigt, dass $f^{(m)}(0) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$.

$\Rightarrow T_m(x,0) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Die Taylorreihe verschwindet somit: $f(x) = R_m(x,0)$.

Für $x > 0$ konvergiert die Taylorreihe nicht gegen $f(x)$.
$f(x)$ ist daher nicht reell-analytisch.

20.8. Satz (Differentiation von Potenzreihen)

Die durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit dem Konvergenzradius r dargestellte Funktion ist gliedweise differenzierbar.
Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ hat den selben Konvergenzradius r und stellt in $(-r, r)$ die Ableitung dar.

20.9. Beispiel

Die Sinusreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $\sin x$. Gliedweise Differentiation ergibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Das ist gerade die Cosinusreihe.
Sie konvergiert ebenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$.