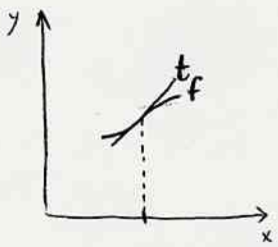
§ 18. DIFFERENZIERBARKEIT

18.1. MOTIVATION

- Wird durch eine Funktion beschrieben, wie sich eine Größe abhängig von einer anderen verändert, so stellt sich die Frage:
  „Wie schnell" ändert sich die abhängige Größe?
  Beschreibt die Funktion z.B. den <u>Ort</u> eines Massenpunktes abhängig von der Zeit (Bewegung entlang einer Linie), so ist dies die Frage nach der <u>Geschwindigkeit</u> (zu jedem Zeitpunkt).
- Betrachtet man eine Funktion nur in der unmittelbaren Nähe einer Stelle, dann möchte man sie dort durch eine einfachere Funktion möglichst gut annähern, z.B. $f(x)$ durch $t(x) = ax+b$ $(a,b \in \mathbb{R})$ (affin-lineare Funktion).



Diese und ähnliche Fragen beantwortet die Ableitung, auch Differentiation genannt.

18.2 DEFINITION

Es sei eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein $\xi \in \mathbb{R}$ gegeben.
$f(x)$ heißt <u>differenzierbar</u> in ξ, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

existiert.

In diesem Fall heißt der Grenzwert <u>Ableitung</u> von $f(x)$ in ξ oder auch <u>Differentialquotient</u> von $f(x)$ in ξ und wird mit

$$f'(\xi) \qquad \text{oder} \qquad \frac{df}{dx}(\xi)$$

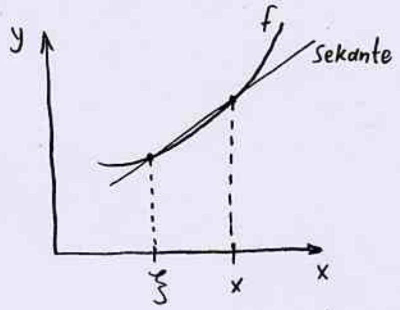
bezeichnet.

Ist f in allen $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so heißt f <u>differenzierbar</u>.

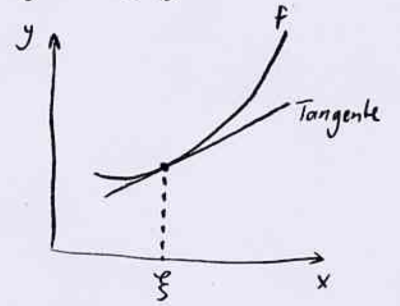
18.3 Bemerkungen

a) Der Ausdruck $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} =: \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ heißt Differenzenquotient.

Er gibt die Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(\xi, f(\xi))$ und $(x, f(x))$ des Graphen von f an.



Für $x \to \xi$ (also $\Delta x \to 0$) geht die Sekantensteigung in die Tangentensteigung im Punkt $(\xi, f(\xi))$ über,



$$f'(\xi) = \frac{dy}{dx}(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

b) Gleichung der Tangente t an f in $(\xi, f(\xi))$:

$$t(x) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi).$$

c) Schränkt man bei der Grenzwertbildung x auf Werte größer/kleiner ξ ein, so erhält man die einseitigen Grenzwerte

$$f'(\xi^+) := \lim_{x \to \xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

$$f'(\xi^-) := \lim_{x \to \xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

die als rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung von $f(x)$ in ξ bezeichnet werden.

d) Wie im Falle der Stetigkeit übertragen sich die Begriffe sinngemäß auf Funktionen mit Definitionsbereich $D \subsetneq \mathbb{R}$.

18.4 Beispiel

Es sei $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$.

Für beliebige $x,\xi\in\mathbb{R}$ gilt dann $f(x)-f(\xi)=x^n-\xi^n=(x-\xi)\cdot(x^{n-1}+x^{n-2}\xi+\dots+\xi^{n-1})$.

Für $x\neq\xi$ also
$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\frac{x^n-\xi^n}{x-\xi}=x^{n-1}+x^{n-2}\xi+\dots+\xi^{n-1},$$
$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=n\xi^{n-1}.$$

Also ist $f(x)=x^n$ überall auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x)=nx^{n-1}$.

18.5 Ableitungen elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
x^α, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x>0$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$, $x>0$	$\frac{1}{x}$

Um aus diesen Ableitungen die vieler weiterer Funktionen „zusammensetzen" zu können, benötigt man die Ableitungsregeln, die im folgenden Satz zusammengefasst sind.

18.6 SATZ (Differentiationsregeln)

a) Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in $\xi\in\mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f in ξ auch stetig.

b) Sind $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in ξ differenzierbar, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, so ist auch $\alpha f+\beta g$ in ξ differenzierbar mit

$$(\alpha f+\beta g)'(\xi) = \alpha\cdot f'(\xi)+\beta\cdot g'(\xi).$$

c) Sind $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in ξ differenzierbar, so ist auch $f\cdot g$ in ξ differenzierbar mit

$$(f\cdot g)'(\xi) = f'(\xi)\cdot g(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi). \qquad \text{(Produktregel)}$$

d) Sind $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in ξ differenzierbar und $g(\xi)\neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ in ξ differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)\cdot g(\xi)-f(\xi)\cdot g'(\xi)}{(g(\xi))^2}. \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

e) Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in $\xi\in\mathbb{R}$ sowie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in $\eta=f(\xi)\in\mathbb{R}$ differenzierbar, so ist auch ihre Komposition $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ in ξ differenzierbar mit

$$(g\circ f)'(\xi) = g'(f(\xi))\cdot f'(\xi). \qquad \text{(Kettenregel)}$$

f) Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und in $\xi\in[a,b]$ differenzierbar mit $f'(\xi)\neq 0$, so ist auch die inverse Funktion

$$f^{-1}:[f(a),f(b)]\longrightarrow\mathbb{R}$$

in $\eta=f(\xi)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(\eta)=\frac{1}{f'(\xi)}.$$

<u>Bemerkungen:</u> Auch diese Aussagen übertragen sich sinngemäß auf Funktionen mit Definitionsbereichen $D\subsetneqq\mathbb{R}$. (f) gilt auch für streng monoton fallende Funktionen (Definitionsbereich von f^{-1} dann $[f(b),f(a)]$).

<u>Beweis:</u> Wir zeigen nur beispielhaft (c) (Produktregel). Die übrigen Beweise verlaufen ähnlich.

Aufgrund der Grenzwertsätze (16.4) gilt

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)g(x)-f(\xi)g(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)g(x) \overbrace{- f(\xi)g(x) + f(\xi)g(x)}^{\text{„geschickt Null addiert"}} - f(\xi)g(\xi)}{x-\xi}$$

$$= \lim_{x\to\xi}\left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\,g(x) + f(\xi)\,\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\right)$$

$$= f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi)$$

18.7. Beispiele

a) Mit $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ folgt

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$\overset{22.6.c}{=} \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

für $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Mit $y = \tan x$ erhält man mit 18.6.(f):

$$\frac{d}{dy}(\arctan y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}(\tan x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

(c)-(e): → S. 131

18.8. Bemerkung

Während Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert, gilt die Umkehrung nicht:

$f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar

$(f'(0^+) = 1 \neq -1 = f'(0^-))$

zu 18.7:

c) $\frac{d}{dx}\left(\sin(e^x)\right) = \cos(e^x)\cdot e^x$

d) $\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}\left(e^{(\ln a)x}\right)$

$= e^{(\ln a)x}\cdot \ln a = a^x \ln a. \qquad (a>0)$

e) Sei $x>0$.

$\frac{d}{dx}(x^x) = \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln x}\right)$

$= e^{x\ln x}\left(1\cdot \ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)$

$= x^x(\ln x + 1)$

18.9. Def.: Sei $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung f'. Falls $f'(x)$ wiederum differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist, so erhält man die <u>zweite Ableitung</u> $f''(x)$ von $f(x)$. Analog definiert man höhere Ableitungen $f'''(x), f''''(x), \dots, f^{(n)}(x)$.

Ist $f(x)$ n-mal differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und die n-te Ableitung $f^{(n)}(x) =: \frac{d^n}{dx^n}f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$, so schreibt man <u>$f\in C^n(\mathbb{R})$</u>. Gilt dies für alle $n\in\mathbb{N}$, schreibt man <u>$f\in C^\infty(\mathbb{R})$</u> und bezeichnet f als <u>n-mal stetig differenzierbar</u> auf $\mathbb{R}$.

Bem.: Die Definitionen übertragen sich sinngemäß auf Intervalle $[a,b]$, wobei in a nur rechtsseitige und in b nur linksseitige Ableitungen betrachtet werden. Ist f auf $[a,b]$ n-mal stetig differenzierbar, schreibt man $f \in C^n[a,b]$.

Statt $C^0[a,b]$ oder $C^0(\mathbb{R})$ schreibt man meist $C[a,b]$ bzw. $C(\mathbb{R})$ für die stetigen Fkt. auf $[a,b]$ bzw. $\mathbb{R}$.

18.10. Beispiel

$$f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 2$$

$$f'(x) = 15x^2 + 12x$$

$$f''(x) = 30x + 12$$

$$f'''(x) = 30$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad \forall n \geq 4$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}).$$