§ 17. WICHTIGE STETIGE FUNKTIONEN

17.1. Motivation

- Es gibt stetige Funktionen, die so wichtig sind, dass sie einen eigenen Namen tragen.
- Wir wollen diese Funktionen und ggf. ihre Umkehrfunktionen genauer betrachten.

17.2. Potenzfunktionen

$f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

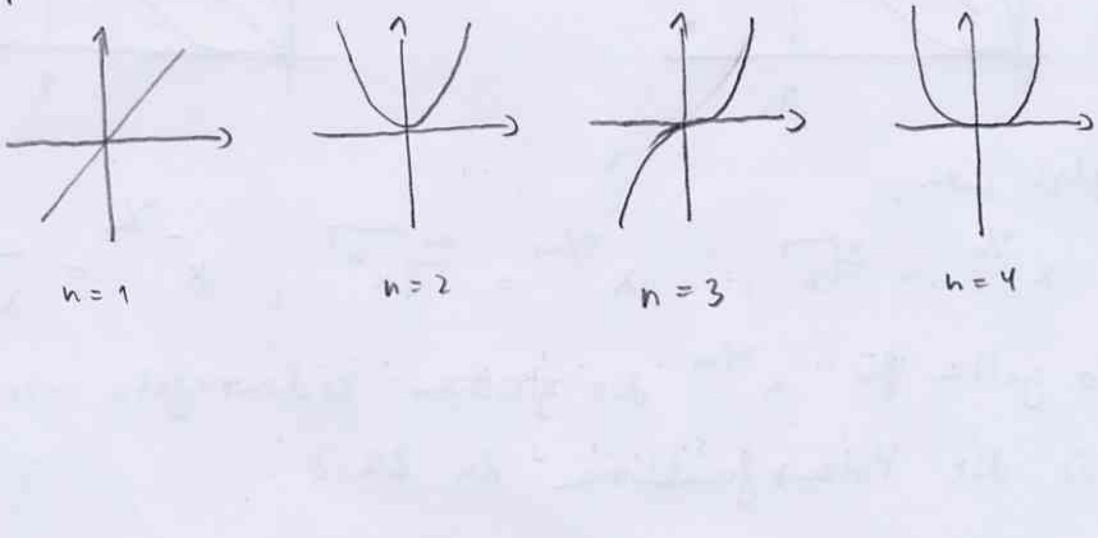
Für $n=0$ definiert man $x^0 = 1$.

Wie alle Polynomfunktionen sind Potenzfunktionen stetig.

Es gelten die Rechenregeln:

$$(x \cdot y)^n = x^n y^n$$
$$x^n x^m = x^{n+m}$$
$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

Beispiele:



$n=1$ $n=2$ $n=3$ $n=4$

17.3. Wurzelfunktion

Schränkt man Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}_0^+$ ein, so sind sie dort nicht nur stetig, sondern auch streng monoton wachsend. Nach 16.9.(c) existiert daher eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion.

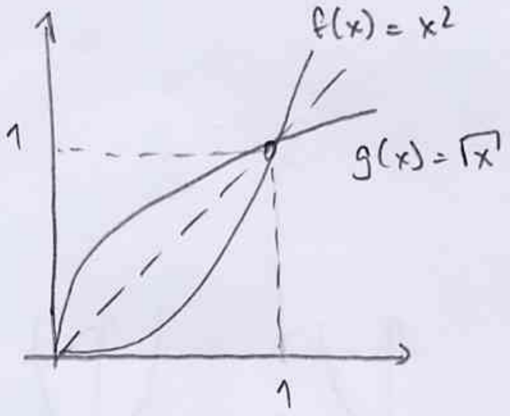
Die Umkehrfunktion zur n-ten Potenzfunktion

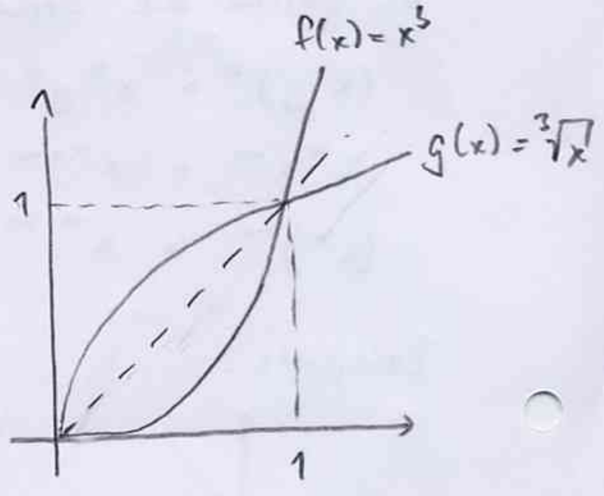
$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : \quad x \mapsto x^n$$

nennt man *n-te Wurzelfunktion*.

$$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : \quad x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

Statt $\sqrt[2]{x}$ schreibt man $\sqrt{x}$.





Setzt man

$$x^{1/n} := \sqrt[n]{x}, \qquad x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n}, \qquad x^{-n/m} = \frac{1}{x^{n/m}},$$

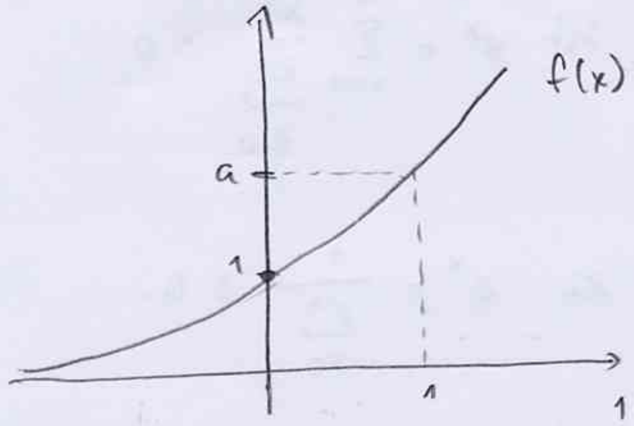
so gelten für $x^{n/m}$ die gleichen Rechenregeln wie für die Potenzfunktionen in 21.2.

17.4. Exponentialfunktionen

Sei $a > 0$. Dann bezeichnet man mit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a^x$$

die Exponentialfunktion zur Basis a



Exponentialfunktionen sind stetig.

Es gilt: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (*)

Besonders wichtig ist die Exponentialfunktion, bei der die Euler'sche Zahl

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}7182\ldots$$

als Basis dient (vgl. 10.15). Man bezeichnet sie als

$$\exp(x) := e^x.$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ hat $\exp(z)$ die Potenzreihendarstellung

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \ldots$$

Sie konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$. (vgl. 12.9, 13.3)

exp wächst schneller als jede Potenz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $e^z = e^x e^{iy}$

Denn: $e^z = e^{x+iy} \overset{(*)}{=} e^x e^{iy}$

b) $e^x > 0$:

Denn: Für $x \geq 0$ ist $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{\geq 0} \geq 0$

Für $x < 0$ ist $e^x = \frac{1}{\underbrace{e^{-x}}_{\geq 0}} \geq 0$.

c) $|e^{iy}| = 1$.

Denn: $|e^{iy}|^2 \overset{9.7}{=} e^{iy}\,\overline{e^{iy}} = e^{iy} e^{-iy}$

$= e^{iy-iy} = e^0 = 1$.

d) $|e^z| = e^x$

Denn: $|e^z| = |e^x e^{iy}| = |e^x|\,|e^{iy}|$

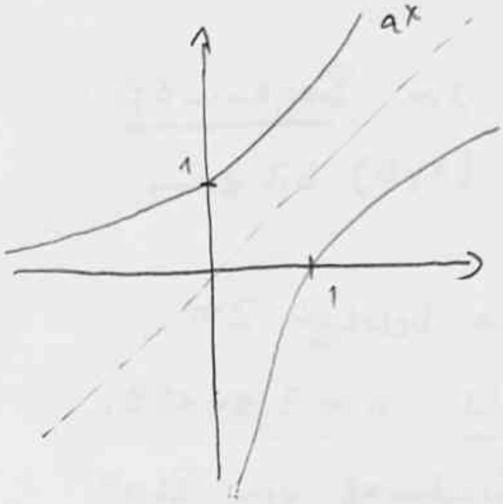
$\overset{(c)}{=} |e^x| \overset{(b)}{=} e^x$

17.5. <u>Logarithmusfunktionen</u>

Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ (mit $a > 1$) ist stetig, streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^+$ ab. Ihre Umkehrfunktion

$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

bezeichnet man als <u>Logarithmusfunktion zur Basis a</u>.



Für $a = e$ ergibt sich der natürliche Logarithmus $\ln$.

Es gelten die Rechenregeln

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x^p) = p \log_a x$$

Logarithmusfunktionen wachsen langsamer als Potenzfunktionen:

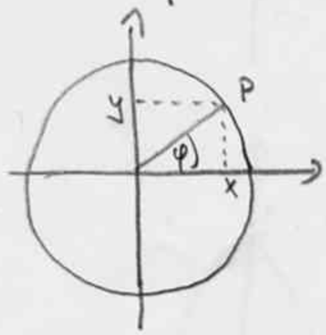
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log_a x}{x^n} = 0 \qquad \text{für } a > 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

17.6. Trigonometrische Funktionen

Die Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis werden in Abhängigkeit vom Winkel φ mit

$$y = \sin\varphi$$

$$x = \cos\varphi$$



bezeichnet.

Hierdurch wird die Sinusfunktion $\sin\varphi$ und die Cosinusfunktion $\cos\varphi$ definiert.

Dabei misst man den Winkel φ im <u>Bogenmaß</u>:

Länge des Kreissegments von $(1,0)$ bis zum Punkt P.

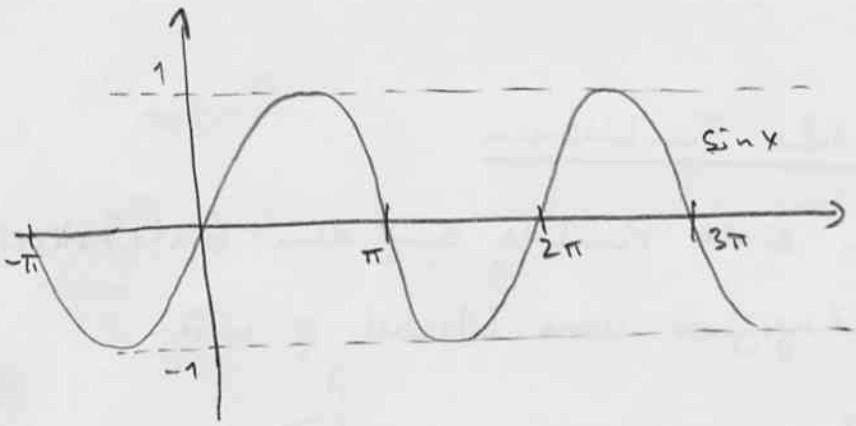
Der Umfang eines Einheitskreises beträgt 2π.

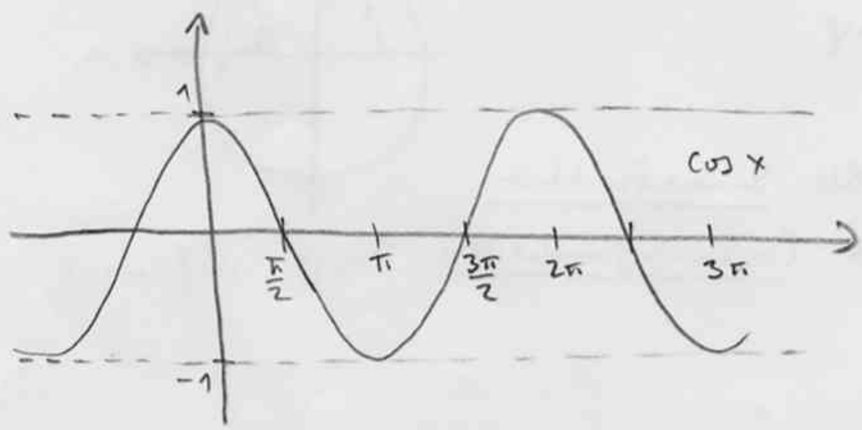
Dabei bezeichnet π die <u>Kreiszahl</u> $\pi \approx 3{,}14159\ldots$

Da das Bogenmaß 2π einem Gradmaß von $360°$ entspricht, gilt:

Gradmaß	Bogenmaß
$0°$	0
$45°$	$\frac{\pi}{4}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$
α	$\frac{\pi}{180°} \cdot \alpha$

Sinus- und Cosinusfunktion haben die Gestalt





Es gilt:

a) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

b) $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ (ungerade Fkt.)

$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ (gerade Fkt.)

c) 2π-Periodizität:

$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi$

$\cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi$

d) Additionstheoreme:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

e) Potenzreihendarstellung:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

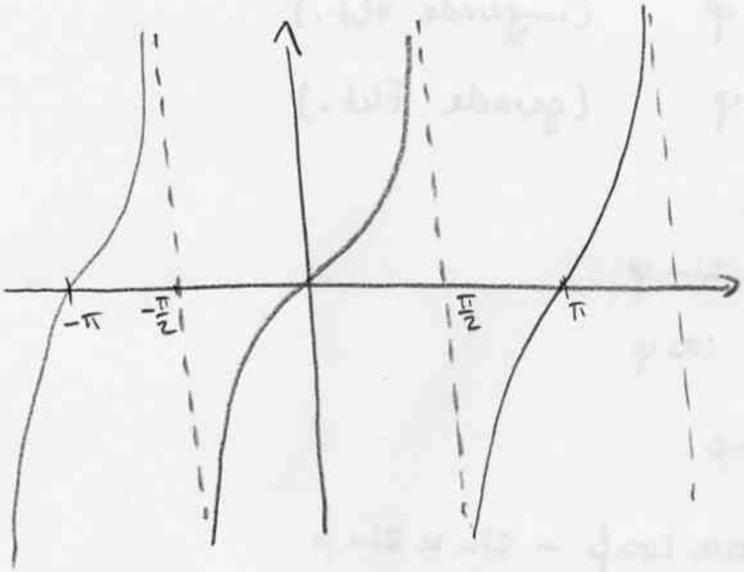
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

Diese Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$. Sinus- und Cosinusfunktion sind stetig, und es gilt die Moivreformel

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Die <u>Tangensfunktion</u> $\tan \varphi$ ist definiert durch

$$\tan \varphi := \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} .$$



π- Periodizität

$\tan \varphi = \tan (\varphi + \pi)$

Sie ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2} \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

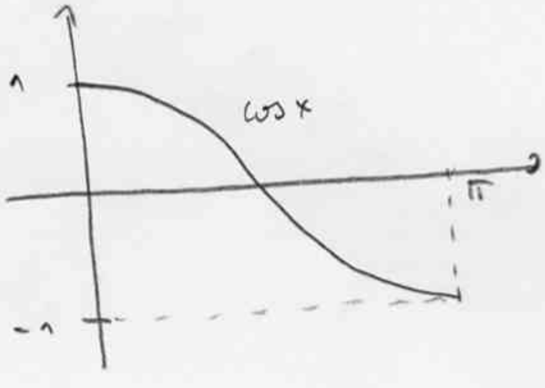
17.7. <u>Trigonometrische Umkehrfunktionen</u>

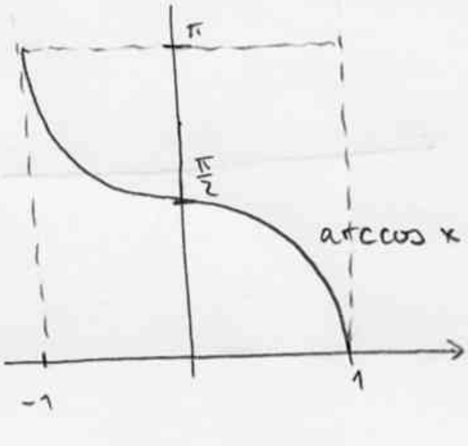
Wenn wir die trigonometrischen Funktionen auf ein Intervall einschränken, auf denen sie streng monoton sind, können wir dort Umkehrfunktionen definieren:

a) cos ist in $[0, \pi]$ streng monoton fallend mit Wertebereich $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion

$$\arccos : \ [-1, -1] \to [0, \pi]$$

heißt <u>Arcus-Cosinus</u>. Sie ist stetig.

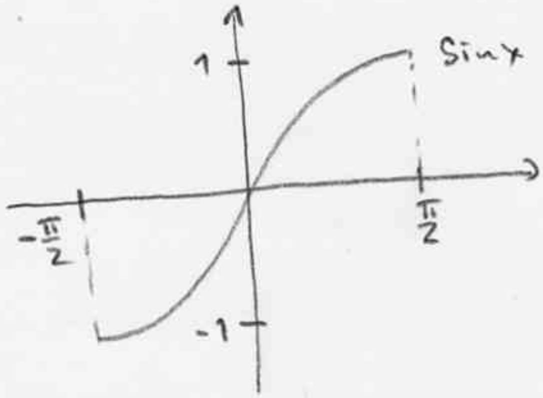


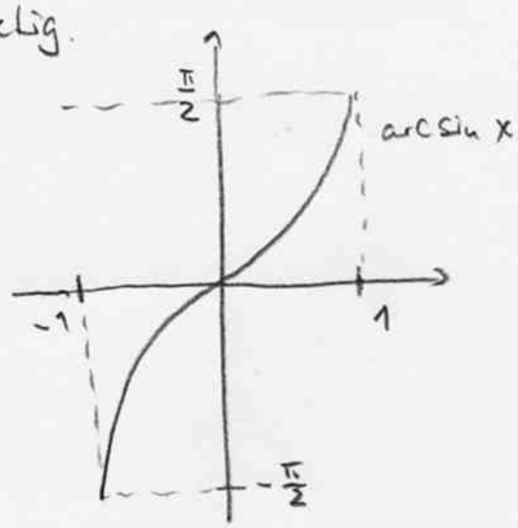


b) sin ist in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend mit Wertebereich $[-1,1]$. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin: \quad [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

heißt Arcus-Sinus. Sie ist stetig.





c) tan ist in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend mit Wertebereich $\mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion

$$\arctan: \quad \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

heißt <u>Arcus-Tangens</u>. Sie ist stetig.