§ 16. STETIGKEIT

16.1. Motivation

- In technischen Systemen erwartet man häufig, dass sich das Resultat nur wenig ändert, wenn man die Eingabegrößen nur gering variiert. Erst dann werden sie rechnerisch handhabbar (Rundungsfehler)
- Mathematisch wird dies durch das Konzept der Stetigkeit formalisiert.

16.2. Def.:

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$.
Wir sagen, $f(x)$ konvergiert für $x \to \xi$ gegen den Grenzwert η, falls für jede (!) Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq \xi \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \eta.$$

In diesem Fall schreiben wir: $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \eta$

16.3. Beispiele

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ hat für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert, denn:
Sei (x_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.
Dann konvergiert (x_n^2) gegen ξ^2; vgl. 10.13.(d).

b)
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$ hat in 0 keinen

Grenzwert:

Sei (x_n) eine Folge mit $x_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$

Für eine Folge (x_n) mit $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gilt jedoch:

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1.$

Die für Folgen bekannten Grenzwertsätze (vgl. 10.13) lassen sich auf Funktionsgrenzwerte übertragen:

16.4. Satz (Grenzwertsätze für Funktionen)

Existieren für die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Grenzwerte im Punkt $\xi \in \mathbb{R}$, so gilt:

a) $\lim\limits_{x\to\xi} (f(x) \pm g(x)) = f(\xi) \pm g(\xi)$

b) $\lim\limits_{x\to\xi} (f(x) \cdot g(x)) = f(\xi) \cdot g(\xi).$

c) $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$ falls $g(\xi) \neq 0.$

d) $\lim\limits_{x\to\xi} (c\, f(x)) = c\, f(\xi).$

e) $\lim\limits_{x\to\xi} |x| = |\xi|.$

16.5. Def.: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt <u>stetig in $\xi \in \mathbb{R}$</u>, wenn dort Funktionswert und Grenzwert übereinstimmen:

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = f\left(\lim_{x \to \xi} x\right).$$

Ist f in allen Punkten stetig, so heißt f <u>stetig</u>.

Der folgende Satz zeigt, dass kleine Änderungen im Argument einer stetigen Funktion nur zu kleinen Änderungen der Funktionswerte führen: Man kann zeigen:

16.6. Satz <u>(ε-δ-Kriterium der Stetigkeit)</u>

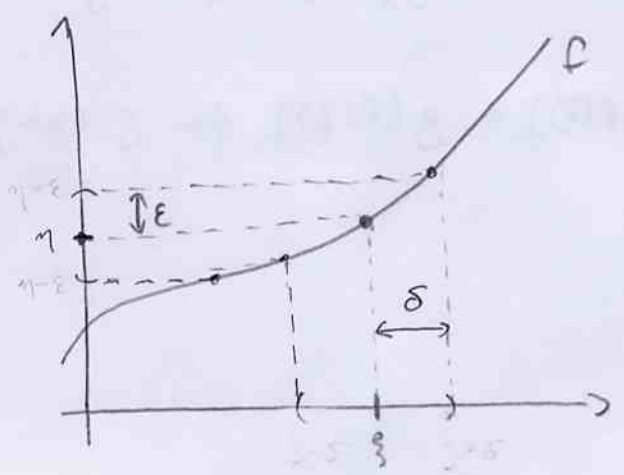
Für eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

a) f ist stetig in ξ, d.h. $f(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} f(x)$.

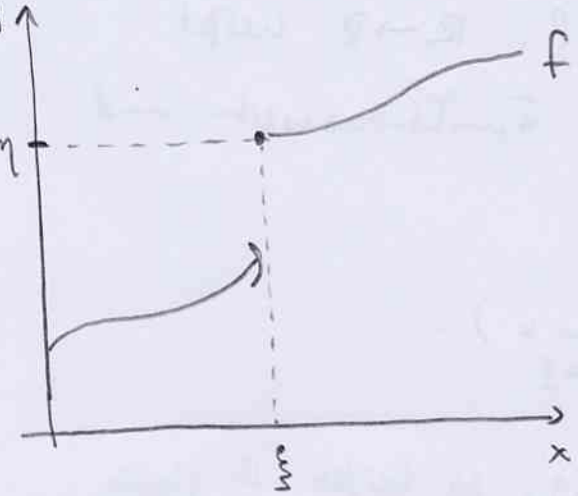
b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. ein $\delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$|x - \xi| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

16.7. <u>Veranschaulichung</u>



Man kann also erreichen, dass die Funktionswerte sich beliebig nahe kommen, wenn sich die Argumente hinreichend wenig unterscheiden.



Das ist hier nicht möglich.
Die Funktion f ist unstetig in ξ.

„Stetige Funktionen kann man zeichnen, ohne abzusetzen."

16.8. <u>Bemerkungen:</u>

a) Satz 16.4 impliziert, dass für in ξ stetige Funktionen $f(x), g(x)$ auch die Funktionen $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (falls $g(\xi) \neq 0$), $c\, f(x)$ stetig sind. Ebenso ist die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ stetig.

b) Die Komposition stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig.

Denn: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und (x_n) eine bel. Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$

$$\Rightarrow \lim_{x_n \to \xi} f(x_n) = f(\xi) \quad \text{da } f \text{ stetig.}$$

$$\Rightarrow \lim_{x_n \to \xi} g(f(x_n)) = g(f(\xi)) \quad \text{da } g \text{ stetig.} \quad \square$$

c) Die Grenzwert- und Stetigkeitsbegriffe sind sinngemäß auch auf Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ übertragbar, deren Definitionsbereich D eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. In diesem Fall müssen die betrachteten Folgen (x_n) in D liegen.

16.9. Beispiel

$f(x) = 5x^3 - 7x + 12$ ist stetig, denn

$g_1(x) = 12$ ist stetig

$g_2(x) = -7x$ " "

$g_3(x) = 5x^3$ " " (Produkt stetiger Funktionen)

$f(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$.

16.10. Satz (Eigenschaften stetiger Funktionen)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

a) Nullstellensatz:
Ist $f(a) \cdot f(b) < 0$, so ex. $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = 0$.

b) Zwischenwertsatz
Zu jedem c mit $f(a) < c < f(b)$ ex. $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = c$.

c) Stetigkeit der Umkehrfunktion:
Ist $f(x)$ stetig und streng monoton wachsend auf $[a,b]$, (d.h. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$), so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.

d) Maximum-Minimum-Eigenschaft

Es ex. $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$,

$f(x_2) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

Beweis von (a):

Sei o.B.d.A. $f(a) < f(b)$.

Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtelung (Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$) mit folgenden Eigenschaften:

a) $f(a_n) \leq 0$, $f(b_n) \geq 0$.

b) $a \leq a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$.

Initialisierung: $a_0 := a$, $b_0 := b$.

Ann.: Die Intervallschachtelung sei bis zum Index n konstruiert und erfülle (a) - (c).

Sei $c := \frac{a+b}{2}$

Ist $f(c) < 0$, setze $a_{n+1} := c$, $b_{n+1} := b_n$

Ist $f(c) \geq 0$, setze $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := c$.

$\Rightarrow$ a) $f(a_{n+1}) \leq 0$, $f(b_{n+1}) \geq 0$.

b) $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$

c) $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \underset{\text{Ann.}}{\overset{\text{Ind.-}}{=}} \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$

Nach Konstruktion ist

- (a_n) mon. wachsend, nach oben beschränkt durch b, und $f(a_n) \leq 0$.

  $\Rightarrow \exists\, \tilde{a}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \tilde{a}$ und $f(\tilde{a}) \leq 0$. (vgl. 10.11, 10.13)

- (b_n) mon. fallend, nach unten beschr. durch a, und $f(b_n) \geq 0$.

  $\Rightarrow \exists\, \tilde{b}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \tilde{b}$ und $f(\tilde{b}) \geq 0$.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(b-a) = 0$ ist $\tilde{a} = \tilde{b} =: \xi$

Wegen $f(\xi) = f(\tilde{a}) \leq 0$ und $f(\xi) = f(\tilde{b}) \geq 0$ ist $f(\xi) = 0$.

$\square$

Bem.: Dieser konstruktive Beweis beschreibt ein numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung, das Bisektionsverfahren (→ Übungsaufgabe).

22/12/06

16.11. Gleichmäßige Stetigkeit

Nach dem ε-δ-Kriterium der Stetigkeit (16.7) ändern stetige Funktionen bei hinreichend kleinen Änderungen des Arguments den Funktionswert nur beliebig wenig.

Allerdings kann zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ (Funktionswertänderung) das entsprechende $\delta(\varepsilon)$ (Argumentänderung) an jeder Stelle ξ anders sein: $\delta = \delta(\varepsilon, \xi)$.

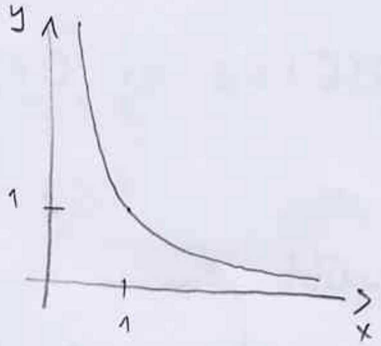
Manchmal ist es wichtig, dass δ nur von ε und nicht von ξ abhängt, d.h. dass man in einem ganzen Intervall zu einem ε dasselbe $\delta(\varepsilon)$ wählen kann.

Def.: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ heißt <u>gleichmäßig stetig</u> auf D, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$ ex. mit

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall\, x_1, x_2 \in D.$$

16.12. <u>Beispiel</u>

$D = (0,\infty)$, $y = f(x) = \frac{1}{x}$



Zu jedem $\delta > 0$ ex. $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \delta.$$

Es ist aber

$$\left| f\left(\tfrac{1}{n}\right) - f\left(\tfrac{1}{n+1}\right) \right| = |n - (n+1)| = 1.$$

Damit gibt es zu $\varepsilon < 1$ kein $\delta(\varepsilon)$ mit der geforderten Eigenschaft. f ist also nicht gleichmäßig stetig auf D (wohl aber stetig)

Gibt es Fälle, in denen Stetigkeit immer auch gleichmäßige Stetigkeit impliziert? Man kann zeigen:

16.13. Satz (<u>Stetigkeit auf abgeschlossenem Intervall</u>)
Jede stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig auf $[a,b]$.

<u>Bem.:</u> Im Beispiel 16.12 war der Definitionsbereich $(0,\infty)$ nicht abgeschlossen.