§15: BINOMIALKOEFFIZIENTEN UND DIE BINOMIALREIHE

15.1. Motivation

Binomialkoeffizienten spielen eine große Rolle

- in der Kombinatorik, wenn man in einer n-elementigen Menge die Zahl der Teilmengen mit k Elementen sucht
- bei der Berechnung von $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$ (binomischer Satz)
- in der Potenzreihenentwicklung von $(1+x)^a$ für $|x| < 1$.

15.2 Def.:

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann heißt

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \text{Anzahl der Teilmengen mit Mächtigkeit } k \\ \text{einer } n\text{-elementigen Menge} \end{cases}$$

der <u>Binomialkoeffizient n über k</u>.

Bem.: Offenbar gilt

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{für } k > n$$

Der folgende Satz liefert eine rekursive Beschreibung des Binomialkoeffizienten:

15.3. Satz (Rekursionsbeziehungen für Binomialkoeffizienten)

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$. Dann gilt:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = n \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Aussage klar für $k = 0$ oder $k = n$. Sei also $0 < k < n$.

Sei $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Die k-elementigen Teilmengen N von M zerfallen in 2 Typen.

a) Mengen N mit $x_n \notin N$. Diese entsprechen den k-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{x_n\}$. Davon gibt es nach Def. 15.2 $\binom{n-1}{k}$ Stück.

b) Mengen N mit $x_n \in N$. Sie entsprechen den $(k-1)$-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{x_n\}$. Davon gibt es nach Def. 15.2 $\binom{n-1}{k-1}$ Stück.

Insgesamt gilt daher: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ $\square$

15.4. Pascal'sches Dreieck

Satz 15.3 erlaubt die Berechnung von Binomialkoeffizienten mit Hilfe eines Dreiecks, in dem jeder Koeffizient als Summe der beiden schräg darüber stehenden Koeffizienten berechnet wird:

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{3} = 1$$

Für große n ist diese Rekursionsvorschrift ineffizient

Gibt es eine direkte Formel?

15.5. Satz (Direkte Formel für Binomialkoeffizienten)

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$. Dann gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Dabei bezeichnet $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ die Fakultät von k

(vgl.). Man setzt $0! = 1$.

Beweis: vollständige Induktion.

15.6. Beispiel

Wie viele Möglichkeiten gibt es im Lotto, 6 aus 49 Zahlen auszuwählen?

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\;43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816$$

Was hat das alles mit Analysis zu tun?

15.7. Satz (<u>Binomialsatz</u>)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

15.8. <u>Beispiele</u>

a) $(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^0 b^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^2 b^0$

$= b^2 + 2ab + a^2$ ✓

b) $(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^0 b^3 + \binom{3}{1} a^1 b^2 + \binom{3}{2} a^2 b^1 + \binom{3}{3} a^3 b^0$

$= b^3 + 3ab^2 + 3a^2 b + a^3$ ✓

15.9. <u>Beweis des Binomialsatzes</u>

Um den Binomialsatz mit vollst. Induktion zu beweisen, verwenden wir das Prinzip der <u>Indexverschiebung</u>:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \qquad (*)$$

Induktionsanfang:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = (a+b)^0 \quad ✓$$

Induktionsannahme:

Für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Induktionsschluss:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\,(a+b)^n$$

$$\overset{\text{Ind.-Ann.}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$\overset{\text{abspalten}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n-k+1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} a^{n+1} b^0 + \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} a^0 b^{n+1}$$

$$\overset{15.3.}{=} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \qquad \square$$

15.10. Binomialreihe: Motivation

Aus dem Binomialsatz 15.7 folgt für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(1+x)^n = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Kann man eine ähnliche Beziehung auch für $(1+x)^\alpha$ gewinnen, wenn α keine nat. Zahl ist?

Hierzu müssen wir den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{k!}\, n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j)$$

verallgemeinern zu

$$\boxed{\binom{\alpha}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)} \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ k \geq 0$$

Dann kann man zeigen:

15.11. Satz (Binomialreihe)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $-1 < x < 1$. Dann hat $(1+x)^\alpha$ die Potenzreihenentwicklung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Bem.: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ bricht die Reihe wegen $\binom{\alpha}{k} = 0 \quad \forall k > \alpha$ ab. (vgl. 15.2).

15.12. Konvergenz der Binomialreihe

Sei $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ und $x \neq 0$. Dann gilt nach dem Quotientenkriterium 12.7 (c) für $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k := \binom{\alpha}{k} x^k$:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(k+1)!} \prod\limits_{j=0}^{k} (\alpha - j)}{\frac{1}{k!} \prod\limits_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)}\right| \cdot |x|$$

$$= \left|\frac{\alpha - k}{k+1}\right| \cdot |x|$$

Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = 1$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x| < 1$.

Damit ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent und somit auch konvergent (vgl. 12.6.(a))

15.13. Beispiele

a) $\alpha := -1$:

$$\binom{-1}{k} \overset{15.10}{=} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (-1-j)$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} (-1)(-2) \cdot \ldots \cdot (-k) = (-1)^k$$

$$\Rightarrow (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \text{ für } |x| < 1.$$

Die geometrische Reihe ist also eine spezielle Binomialreihe.

b) $\alpha := \frac{1}{2}$

$$\binom{1/2}{0} \overset{15.10}{=} \underbrace{\frac{1}{0!}}_{1} \underbrace{\prod_{j=0}^{0-1} \left(\frac{1}{2} - j\right)}_{1} = 1$$

$$\binom{1/2}{1} = \frac{1}{1!} \prod_{j=0}^{1-1} \left(\frac{1}{2} - j\right) = \frac{1}{2}$$

$$\binom{1/2}{2} = \frac{1}{2!} \prod_{j=0}^{2-1} \left(\frac{1}{2} - j\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3) \text{ für } |x| < 1.$$