# §14 DARSTELLUNG VON ZAHLEN IN ZAHLSYSTEMEN

## 14.1 MOTIVATION

- Zahlsysteme ermöglichen effiziente Darstellung natürlicher (und auch reeller) Zahlen mit einem endlichen Zeichenvorrat.
- Die Wahl von 10 als Basis ist (mathematisch gesehen) willkürlich.

  Für Anwendungen in der Informatik sind Darstellungen z.B. im Hexadezimalsystem (Basis 16), besonders aber im Dualsystem (2) wichtig.

## 14.2 SATZ (Darstellung natürlicher Zahlen in Zahlsystemen)

Es sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Dann lässt sich jedes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig in der Form

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $a_i \in \{0, \dots, b-1\}$ darstellen, $a_m \neq 0$.

Anstelle von $a_m b^m + \dots + a_0 b^0$ schreibt man $(a_m a_{m-1} \dots a_0)_b$.

*Beweis:* Hartmann, S.48.

## 14.3 DEFINITION

Die möglichen Koeffizienten $0, \dots, b-1$ nennt man Ziffern des Systems zur Basis $b$ (andere Bezeichnung: ...des b-adischen Systems)

## 14.4 BEISPIEL

$b=2$: $\quad 256 = (256)_{10} = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1$

$$= 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + \dots + 0 \cdot 1 = (100\,000\,000)_2.$$

Wie findet man die Ziffern für die Zahldarstellung?

Durch wiederholte Division mit Rest (vgl. 6.2)

$$(a_m b^m + \dots + a_0 b^0) : b = \underbrace{a_m b^{m-1} + \dots + a_1 b^0}\ \text{Rest } a_0$$

$$(a_m b^{m-1} + \dots + a_1 b^0) : b = \underbrace{a_m b^{m-2} + \dots + a_2 b^0}\ \text{Rest } a_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_m b^0 : b = 0 \quad \text{Rest } a_m$$

14.5 DEFINITION

Es sei $z \in \mathbb{Z}$, und für alle $n \geq z$ sei $a_n \in \{0, \ldots, b-1\}$.
Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=z}^{\infty} \frac{a_n}{b^n} \quad \text{(Reihe mit negativen Indizes)}$$

mit $a_z \neq 0$ heißt b-adischer Bruch.

Man schreibt dafür $(a_z, a_{z+1} \ldots \; \mathrm{E} -z)_b$.
Man spricht von

- einem endlichen b-adischen Bruch und schreibt
$$(a_z, a_{z+1} \ldots a_n \; \mathrm{E} -z)_b,$$
falls $a_i = 0$ für alle $i > n$,
- einem periodischen b-adischen Bruch und setzt
$$(a_z, a_{z+1} \ldots a_n \overline{p_1 \ldots p_r} \; \mathrm{E} -z)_b$$
$$:= (a_z, a_{z+1} \ldots a_n \, p_1 \ldots p_r \, p_1 \ldots p_r \ldots \; \mathrm{E} -z)_b,$$
falls eine Folge $p_1 \ldots p_r$ von Ziffern sich ständig wiederholt.

Alternative Schreibweisen:

$$(a_z \, a_{z+1} \ldots a_0, a_1 \, a_2 \ldots)_b \quad \text{für } z \leq 0,$$
$$(0, \underbrace{0 \ldots 0}_{\substack{z-1 \\ \text{Nullen}}} a_z \, a_{z+1} \ldots)_b \quad \text{für } z > 0.$$

14.6 BEISPIEL

$$(4,625 \; \mathrm{E} \; 1)_7 = (46,25)_7 = 4 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 + \frac{2}{7^1} + \frac{5}{7^2} = \frac{1685}{49}.$$

14.7 SATZ (Darstellung reeller Zahlen in Zahlsystemen)
Es sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Dann gilt:

a) Jeder b-adische Bruch konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

b) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, gibt es einen b-adischen Bruch, der gegen $x$ konvergiert.

c) Jeder periodische b-adische Bruch konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$.

d) Zu jedem $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$, gibt es einen periodischen oder endlichen b-adischen Bruch, der gegen $x$ konvergiert.

Beweis: a), b), c) z.B. Hartmann S. 251.

Zu d): O.B.d.A. sei $x = \frac{p}{q} < 1$, $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$.

Wir suchen $a_1, a_2, \ldots$ mit $\frac{p}{q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$.

- Berechnung der $a_i$ durch folgenden Divisionsalgorithmus für natürliche Zahlen:

$$\left.\begin{array}{llll} (b\cdot p) : q &= a_1 & \text{Rest } r_1, & 0 \le r_1 < q, \\ (b\cdot r_1) : q &= a_2 & \text{Rest } r_2, & 0 \le r_2 < q, \\ \quad\vdots & & & \quad\vdots \\ (b\cdot r_n) : q &= a_{n+1} & \text{Rest } r_{n+1}, & 0 \le r_{n+1} < q, \\ \quad\vdots & & & \quad\vdots \end{array}\right\} (*)$$

- Hierbei ist stets $a_i < b$:

  Wäre nämlich $a_i \ge b$, so $b \cdot r_{i-1} = q \cdot a_i + r_i \ge q \cdot b + 0$ und damit $r_{i-1} \ge q$ im Widerspruch zu $0 \le r_{i-1} < q$ (für $i > 1$)

  Für $i = 1$ ergibt sich analog ein Widerspruch zu $p < q$.

- Die $a_i$ sind die gesuchten Koeffizienten, denn nach $(*)$ ist

$$p = \frac{a_1}{b} \cdot q + \frac{r_1}{b}$$

$$r_1 = \frac{a_2}{b} \cdot q + \frac{r_2}{b} \underset{\substack{(r_1 \text{ in } p\\ \text{einsetzen})}}{\Longrightarrow} p = \left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2}\right) \cdot q + \frac{r_2}{b^2}$$

$$\vdots$$

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{b} \cdot q + \frac{r_{n+1}}{b} \Longrightarrow p = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{b^k}\right) \cdot q + \frac{r_{n+1}}{b^{n+1}}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{r_{n+1}}{b^{n+1} q}}_{\substack{\text{konvergiert}\\ \text{gegen } 0\\ \text{für } n \to \infty}} = \frac{p}{q} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{b^k}}_{\substack{\text{konvergiert}\\ \text{gegen } \frac{p}{q}}}$$

konvergiert gegen 0 für $n \to \infty$ $\Longrightarrow$ konvergiert gegen $\frac{p}{q}$.

Wann endet der Algorithmus?

- Gilt $r_n = 0$, so $\frac{p}{q} = (0, a_1 \dots a_n)_b$ $\rightarrow$ endlicher $b$-adischer Bruch.

- Gilt $r_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so muss sich ein Rest wiederholen.
Damit wiederholen sich alle nachfolgenden Divisionen und Reste:
Ist z.B. $r_n = r_s$ für ein $n > s$, so folgt

$$a_{n+1} = a_{s+1} \text{ und } r_{n+1} = r_{s+1}, \text{ usw.}$$

Also

$$\frac{p}{q} = (0, a_1 \dots a_s \overline{a_{s+1} \dots a_n})_b \quad \rightarrow \text{ periodischer } b\text{-adischer Bruch.}$$

## 14.8 Bemerkungen

1) Ein periodischer $b$-adischer Bruch der Form

$$(**) \quad (a_z a_{z+1} \dots a_n \overline{p}\, E\!-\!z)_b \quad \text{mit } p = b-1 \text{ und } a_n < b-1$$

stellt dieselbe Zahl dar wie der endliche $b$-adische Bruch

$$(a_z, a_{z+1} \dots a_n'\, E\!-\!z)_b \quad \text{mit } a_n' = a_n + 1.$$

Zum Beispiel ist $(0,\overline{9})_{10} = (1)_{10} = 1$, $\quad (23{,}482\overline{9})_{10} = 23{,}483$

Es ist daher üblich, solche (**) $b$-adischen Brüche als Zahldarstellungen auszuschließen, um zu jeder reellen Zahl eine eindeutige Darstellung zu haben.

2) Die Darstellung aus Def. 14.5 zur Basis $b=2$ entspricht der Speicherung von Zahlen im Computer.
Man beachte, dass die führende Ziffer stets 1 ist; man hat also nach 14.5

$$(1, a_{z+1} \dots a_{z+m} E\!-\!z)_2 \qquad \text{(nur endlich viele Ziffern)}$$

Die endliche Folge der $a_i \in \{0,1\}$, $z+1 \leq i \leq z+m$, heißt <u>Mantisse</u>.
Die so genannte Gleitkommadarstellung umfasst das Vorzeichen, die Mantisse und den Exponenten:

$$\underbrace{\pm}_{\substack{\text{Vorzeichen}\\ 1\text{ Bit}\\ (0 \hat{=} „+“\\ 1 \hat{=} „-“)}} 1, \underbrace{01 \dots 1}_{\substack{\text{Mantisse}\\ m \text{ Bit}}} \cdot 2^{\overbrace{11..01}^{\substack{\text{Exponent}\\ e\text{ Bit}}}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\boxed{\text{Vorz}}}_{1}\underbrace{\boxed{\text{Exponent + Offset}}}_{e}\underbrace{\boxed{\quad\text{Mantisse}\quad}}_{m}$$

z.B. Datentyp <u>float</u>: $\quad m = 23, \; e = 8, \;$ Offset 127