§ 13 POTENZREIHEN

13.1 MOTIVATION

Potenzreihen sind wichtig bei der Darstellung und Approximation von Funktionen (Taylorreihen; erzeugende Funktionen)

13.2 DEFINITION

Eine Reihe der Form

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \,(x-x_0)^i$$

mit $x_0, x \in \mathbb{R}$ heißt Potenzreihe. x_0 heißt Entwicklungspunkt.

Im folgenden sei stets $x_0 = 0$.

13.3 BEISPIELE

1) Die Exponentialreihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$. Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen e^x.

2) Die geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

Sie stellt für $|x|<1$ eine Funktion dar: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

Die geometrische Reihe konvergiert absolut für $|x|<1$ und divergiert für $|x|\geq 1$.

Es scheint eine „Grenze" zu geben, die die Bereiche trennt, in denen eine Potenzreihe konvergiert oder divergiert.

13.4 SATZ

Für eine Potenzreihe, die nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, gibt es ein $R \geq 0$ derart, dass sie

- für $|x| < R$ absolut konvergiert und
- für $|x| > R$ divergiert.

Beweis: siehe z.B. Hartmann, S. 303

BEMERKUNG: Für $x = \pm R$ lässt sich keine allgemeine Aussage treffen.

DEFINITION:

Die Zahl R heißt <u>Konvergenzradius</u>, und $]-R,R[$ heißt <u>Konvergenzintervall</u>.

Man legt fest:

$R=\infty$: Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

$R=0$: Die Potenzreihe konvergiert nur für $x=0$.

13.5 BEMERKUNG

Man darf in eine Potenzreihe auch komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ einsetzen; Satz 13.4 gilt analog. Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ in der komplexen Zahlenebene ist eine offene Kreisscheibe.

13.6 SATZ (Berechnung des Konvergenzradius)

a) (D'ALEMBERT'sches Kriterium)

Sind für die Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ alle a_i ab einem gewissen Index ungleich 0 und existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, so ist

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

(dies gilt auch, wenn der Grenzwert $+\infty$ ist).

b) (Satz von CAUCHY-HADAMARD)

Besitzt die Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ den Konvergenzradius R und konvergiert die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(dies gilt auch, wenn der Grenzwert 0 oder ∞ beträgt; in diesem Fall muss $\frac{1}{0}$ ~~als~~ ∞ und $\frac{1}{\infty}$ als 0 interpretiert werden).

13.7 BEISPIELE

a) Geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1 \Rightarrow R=1$ nach 13.6 a).
Für $x=\pm 1$ liegt Divergenz vor.

b) Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}$ hat den Konvergenzradius $R=1$, denn $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$
$\Rightarrow R=1$ nach 13.6 b).
$x=1$: Divergenz (harmonische Reihe); $x=-1$: Konvergenz (alternierende harmonische Reihe)