§ 12: REIHEN

12.1. Motivation

- Reihen sind spezielle Folgen, die z.B. als Potenzreihen wichtige Anwendungen in der Approximation klassischer Funktionen wie sin, cos, exp, log haben.
- In der Informatik haben sie zudem Bedeutung in der Zahlendarstellung.

12.2. Def.: Sei (a_n) eine Folge. Bildet man hieraus die neue Folge (s_n) mit

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

so nennt man (s_n) eine <u>Reihe</u> und schreibt hierfür $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Die Glieder s_n heißen <u>Partialsummen</u> der Reihe. Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so wird ihr Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ ebenfalls mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

Bem.: Folgen und Reihen unterscheiden sich also lediglich dadurch, dass man bei Reihen versucht, Konvergenzaussagen nicht in Abhängigkeit von s_n, sondern von den Summanden a_k zu gewinnen.

Wann konvergiert eine Reihe?

12.3. Satz (Konvergenzkriterien für Reihen)

a) Cauchy-Kriterium (vgl. 10.11. (b))

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent

$\Longleftrightarrow$ Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq n_0(\varepsilon) \text{ mit } m \geq n.$$

b) Notwendige Konvergenzbedingung

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Longrightarrow$ (a_k) ist Nullfolge

(Die Umkehrung ist i. A. falsch!)

c) Linearität

Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergieren, so konvergieren auch $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k$ für $c \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k .$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

d) Leibniz-Kriterium

Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge nichtnegativer Zahlen a_k. Dann konvergieren die alternierenden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$. Ihr Grenzwert liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen.

Beweis:

a) Folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium 10.11.(b).

b) Folgt aus (a) mit $m=n$.

c) Folgt aus den Rechenregeln für Folgen (10.13).

d) Betrachte (s_n) mit $s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$. Dann gilt:

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0$$

d.h. $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend (*)

$(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend (**)

Wegen

$$s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \geq s_{2n-1} \overset{(**)}{\geq} s_1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

ist $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt.

Nach 10.11 (c) existiert somit $s := \lim_{n\to\infty} s_{2n}$.

Analog zeigt man, dass $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist und $s' := \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$ existiert.

Wegen $s - s' = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$

haben (s_{2n}) und (s_{2n-1}) den selben Grenzwert, d.h. (s_n) konvergiert gegen s. Ferner gilt:

$$s_{2n-1} \overset{(**)}{\leq} s \leq s_{2n} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Der Beweis für $s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ verläuft analog. $\square$

Bem.: Das Cauchy-Kriterium impliziert, dass das Konvergenzverhalten einer Reihe sich nicht ändert, wenn man endlich viele Summanden abändert. In diesem Fall ändert sich höchstens der Grenzwert.

12.4. Beispiele

a) Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Hier ist es sinnvoll,} \\ \text{mit } k=0 \text{ zu beginnen.}\end{array}\right)$$

Wie sehen die Partialsummen aus?

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\ q\, s_n &= \phantom{1 + {}} q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} \\ \hline (1-q)\, s_n &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Für } q \neq 1: \qquad s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Für $|q| < 1$ ist daher

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q},$$

d.h. die geometrische Reihe konvergiert.

Für $|q| \geq 1$ ist $(a_k) = (q^k)$ keine Nullfolge.

Nach 12.3. (b) kann $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ in diesem Fall nicht konvergieren.

b) Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

ist divergent, denn es gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{m} = \frac{m-n+1}{m} \to 1 \text{ für } m \to \infty$$

Somit ist für $0 < \varepsilon < 1$ das Cauchy-Kriterium verletzt.

c) Alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$$

konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, da $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Wegen $s_1 = 1$, $s_2 = \frac{1}{2}$ gilt die Einschließung

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \leq 1 .$$

(Man kann zeigen, dass der Grenzwert $\ln 2 \approx 0,69$ beträgt.)

8.12.06

Bei endlichen Summen darf man die Reihenfolge der Summation vertauschen. Bei unendlichen Summen (Reihen) ist dies nur in besonderen Fällen erlaubt.
Hierzu benötigen wir den Begriff der absolut konvergenten Reihe.

12.5. Def.: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt <u>absolut konvergent</u>, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

12.6. <u>Zusammenhang zwischen Konvergenz und absoluter Konvergenz</u>

a) Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

<u>Beweis</u>: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Nach dem Cauchy-Kriterium für $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ex. zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\underbrace{\left| \sum_{k=n}^{m} |a_k| \right|}_{\sum_{k=n}^{m} |a_k|} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0(\varepsilon) \text{ mit } m \geq n.$$

Wegen $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|$ (vgl. 8.20.(c)) gilt:

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq n_0(\varepsilon) \text{ mit } m \geq n,$$

d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ erfüllt das Cauchy-Kriterium 12.3.(a) und ist somit konvergent.

b) Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren.

<u>Beispiel</u>: Die alternierende harmonische Reihe (12.4.(c)) konvergiert. Sie konvergiert jedoch nicht absolut, da die harmonische Reihe (12.4.(b)) divergiert.

Man kann folgende Kriterien für absolute Konvergenz zeigen:

12.7. Satz (<u>Kriterien für absolute Konvergenz</u>)

a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent

$\iff$ Die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

b) <u>Majorantenkriterium</u>

Sei $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent

$\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent

($\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ heißt dann <u>Majorante</u> für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$)

c) <u>Quotientenkriterium</u>

Sei $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$.

Gilt für alle $k \geq k_0$ die Ungleichung $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$

mit einem festen $q < 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

d) <u>Wurzelkriterium</u>

Gilt für alle $k \geq k_0$ die Ungleichung $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$

mit einem festen $q < 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

12.8. <u>Bemerkungen</u>

a) Um nach Quotienten- bzw. Wurzelkriterium absolute Konvergenz zu zeigen, genügt es, wenn gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \qquad \text{bzw.} \quad \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 .$$

b) gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ oder $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$,

so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

c) Für $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$ bzw. $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$

ist kein Schluss auf das Konvergenzverhalten möglich

12.9. <u>Beispiele zu Satz 12.7</u>

a) Sei $k! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1)k$. (<u>Fakultät</u> von k).

Für jede reelle Zahl z konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{z^k}{k!}}_{a_k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

absolut, denn für $z \neq 0$ gilt:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{z^{k+1} k!}{z^k (k+1)!}\right| = \frac{|z|}{k+1} \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Somit ist das Quotientenkriterium erfüllt.

Für $z = 0$ liefert die Reihe den Wert 1.

Bem.: Es gilt übrigens $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{R}$

(e: Euler'sche Zahl, vgl. 10.15)

b) Betrachte $\sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(\ln k)^k}}_{a_k}$.

Wegen $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\ln k} \to 0$ für $k \to \infty$

konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium absolut.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert absolut, und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 + \cancel{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} + \cancel{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)} + \dots + \cancel{\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \text{ für } n \to \infty.$$

Die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also beschränkt und konvergiert somit absolut gemäß 12.7 (a).

d) Für jedes $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 2$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ absolut konvergent:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \overset{(c)}{<} 1 + 1 = 2$$

Aus der Beschränktheit $0 \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{k^r}\right| < 2$ folgt nach 12.7 (a) die absolute Konvergenz.

Absolut konvergente Reihen haben den Vorteil, dass man sie umordnen darf. Man kann zeigen:

12.10. Satz (Umordnungssatz)

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und ist $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Umordnung (bijektive Abb.), so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$$

Bem.: Für konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen gilt dies nicht.

Absolut konvergente Reihen lassen sich auch gut miteinander multiplizieren: Mit Hilfe des Umordnungssatzes kann man zeigen:

12.11 Satz (Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen)

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent (der Einfachheit halber beginnen wir hier mit 0).

Ferner sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut, und es gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

<u>Bem.:</u> Das Cauchy-Produkt summiert also folgendermaßen auf:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l\right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) + \ldots$$