§ 10: FOLGEN

10.1. Motivation

In der Informatik gibt es zwei Möglichkeiten, Objekte zu repräsentieren:

a) explizit als Datenstruktur im Speicher.
   Beispiel: $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

b) implizit als Berechnungsvorschrift:
   Beispiel: Programm, das $\sqrt{2}$ iterativ immer besser approximiert.

In den Situationen, wo (b) günstiger ist, benötigt man Kenntnisse über Folgen und ihre Grenzwerte.

10.2. Def.: Eine Abbildung

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto f(n) =: a_n$$

heißt <u>(reellwertige) Folge</u>.

Wir nennen a_n das <u>n-te Glied</u> der Folge und kürzen die Folge mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (a_n) oder einfach nur a_n ab.

<u>Bem.:</u>

Viele (jedoch nicht alle) der folgenden Resultate lassen sich auch auf andere Wertebereiche (z.B. $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$) übertragen.

10.3. Beispiele

a) konstante Folge: $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

c) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

d) $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $b, b^2, b^3, \dots$

e) Die Fibonacci-Folge ist rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1$$
$$a_2 := 1$$
$$a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3$$

Dies ergibt $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$
Sie spielt eine fundamentale Rolle in vielen Naturvorgängen, insbesondere Wachstumsprozesse.

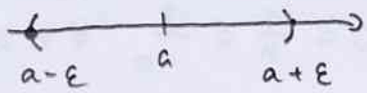
29.11.06

10.4. Def.: Eine reellwertige Folge (a_n) heißt monoton wachsend, wenn $a_{n+1} \geq a_n \;\forall n \in \mathbb{N}$. Gilt sogar $a_{n+1} > a_n \;\forall n \in \mathbb{N}$, so ist sie streng monoton wachsend.
Analog definiert man (streng) monoton fallend.
(a_n) heißt nach oben / unten beschränkt, wenn $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben / unten beschränkt ist.
Entsprechend werden $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ als das Supremum / Infimum von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ definiert.

Wie kann man das Konvergenzverhalten einer Folge beschreiben?

10.5. Def.:

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann nennen wir $U_\varepsilon(a) := \{ x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon \}$ die <u>ε-Umgebung</u> von a.



Eine Folge (a_n) heißt <u>konvergent</u> gegen a, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder liegen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad |x-a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon).$$

Man schreibt: „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$" oder

„$a_n \to a$ für $n \to \infty$".

Die Zahl a heißt <u>Grenzwert</u> (<u>Limes</u>) der Folge (a_n).

Eine reellwertige Folge heißt <u>divergent</u>, wenn sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

10.6. Beispiele

a) Die konstante Folge ist konvergent:

$a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, denn:

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. nach 8.18 (b) ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Wegen $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \; \forall n \geq n_0$ (vgl. 8.18 (b)). ist also $\frac{1}{n} \in U_\varepsilon(0) \quad \forall n \geq n_0$.

Bem.: Folgen, die gegen 0 konvergieren, heißen auch Nullfolgen.

c) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

10.7. Def. Sei (a_n) eine Folge. Dann strebt a_n gegen ∞, ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$), falls für jedes $r > 0$ ein $n_0(r) \in \mathbb{N}$ ex. mit $a_n > r \quad \forall n \geq n_0(r)$. In diesem Fall spricht man auch von uneigentlicher Konvergenz oder bestimmter Divergenz.

Analog definiert man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ falls für jedes $r < 0$ ein $n_0(r) \in \mathbb{N}$ ex. mit $a_n < r \quad \forall n \geq n_0(r)$

10.8. Beispiel

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$

Können unbeschränkte Folgen konvergieren?

10.9. Satz (Beschränktheit konvergenter Folgen)

Eine konvergente Folge ist beschränkt (d.h. sie ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt).

Beweis:

Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann ex. n_0 mit $a_n \in U_1(a)$ $\forall n \geq n_0$.

Damit ist $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in der beschränkten Menge

$\{a_1, \dots, a_{n_0-1}\} \cup U_1(a)$ enthalten. $\square$

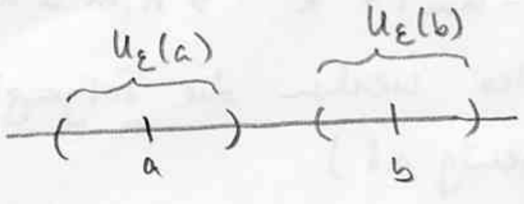
Kann es mehrere Grenzwerte geben?

10.10. Satz (Eindeutigkeit des Grenzwerts)

Konvergiert die Folge (a_n), so ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.

Beweis:

Ann.: (a_n) habe zwei Grenzwerte a, b mit $a \neq b$.



Wähle ε so, dass $\varepsilon < \dfrac{|a-b|}{2}$

Dann ist $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ $\quad (*)$

Da a, b Grenzwerte von (a_n) sind, ex. $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall n \ge n_0$$
$$a_n \in U_\varepsilon(b) \quad \forall n \ge n_1$$

D.h. $a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) \quad \forall n \ge \max(n_0, n_0)$.

Das widerspricht $(*)$. $\square$.

Gibt es Kriterien zum Nachweis von Konvergenz?

10.11. Satz (<u>Konvergenzkriterien</u>)

a) <u>Vergleichskriterium</u>

Seien (a_n), (b_n), (c_n) reelle Folgen mit

$a_n \le b_n \le c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n =: b$.

Dann konvergiert (b_n) und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

b) <u>Cauchy-Kriterium</u>

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn sie eine <u>Cauchy-Folge</u> ist, d.h

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0(\varepsilon): \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \ge n_0.$$

(Für hinreichend großen Index weichen die Folgenglieder untereinander beliebig wenig ab).

c) Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent.

Ebenso ist jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergent

Beweis:

Wir zeigen nur (a).

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$:

$$a_n \in U_\varepsilon(b) \quad \forall n \geq n_0$$

$$c_n \in U_\varepsilon(b) \quad \forall n \geq n_1.$$

$$\Rightarrow \quad b - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < b + \varepsilon \qquad \forall n \geq n_2 := \max(n_0, n_1).$$

Also ist $b_n \in U_\varepsilon(b)$ $\forall n \geq n_2$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. $\square$

10.12. Beispiel

$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und von unten durch 0 beschränkt.

Somit ist $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ konvergent.

Man kann zeigen:

10.13. Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

a) Falls $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, so ist $a \leq b$.

b) Falls $a_n < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, so ist $a \leq b$.
($a < b$ ist i. A. falsch!)

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

(d.h. insbes. auch $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$.

e) Ist $b \neq 0$, so ex. n_0 mit $b_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$.

Dann sind auch $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ und $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$

konvergent mit Limes $\frac{1}{b}$ bzw. $\frac{a}{b}$.

f) $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $|a|$.

g) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{a}.$$

(Dabei bezeichnet $\sqrt[m]{a_n}$ die eindeutig bestimmte Zahl $w \geq 0$ mit $w^m = a_n$)

10.14. Beispiele

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{17}{n} = 17 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \overset{10.11.c}{=} 17 \cdot 0 = 0$

b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$$\underset{(c)}{\overset{(d)}{=}} \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{\lim 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1+0} = 1$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^4-2n^2+1}{7n^4+11n^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{7+\frac{11}{n}+\frac{1}{n^4}}$

$= \dfrac{5-0+0}{7+0+0} = \dfrac{5}{7}$

10.15. Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$

Anwendungsbeispiel:

Ein Geldbetrag a_0 wird mit einem Jahreszinssatz p jährlich, halbjährlich, vierteljährlich usw. verzinst.

Nach einem Jahr ergibt sich also

$a_1 = a_0\,(1+p)$ bei jährl. Verzinsung

$a_2 = a_0\,\left(1+\frac{p}{2}\right)^2$ bei halbjährl. Verz.

$a_4 = a_0\,\left(1+\frac{p}{4}\right)^4$ bei vierteljährl. Verz.

$a_{12} = a_0\,\left(1+\frac{p}{12}\right)^{12}$ bei monatl. Verz.

z.B. ergibt sich mit $a_0 = 100$ €, $p = 0.03$ und Rundung auf 2 Nachkommastellen:

$a_1 = 103$ €

$a_2 = 103{,}02$ €

$a_4 = 103{,}03$ €

$a_{12} = 103{,}04$ €

Konvergiert die Folge a_n mit $a_n = \left(1+\frac{p}{n}\right)^n$?

Man kann zeigen:

- (a_n) ist monoton wachsend
- (a_n) ist nach oben beschränkt

Somit konvergiert (a_n) nach 10.11 (c).

Für $p = 1$ ist der Grenzwert die Euler'sche Zahl e:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}7182\ldots$$

und für allgemeines p erhält man

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{p}{n}\right)^n = e^p}\,.$$