# §9. KOMPLEXE ZAHLEN

## 9.1. Motivation

Neue Zahlenbereiche entstehen oft aus dem Wunsch, bestimmte Gleichungen zu lösen:

Beispiele:

a) $x + 3 = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{N}$, aber in $\mathbb{Z}$.

b) $5x = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{Z}$, aber in $\mathbb{Q}$

c) $x^2 = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{Q}$, aber in $\mathbb{R}$.

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.
Ein neuer Zahlenbereich, die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, erlaubt es uns, auch solche Gleichungen zu lösen.
Komplexe Zahlen sind nützlich in der Elektrotechnik und der technischen Informatik zur Schaltkreisbeschreibung, und im Visual-Computing-Bereich zur Frequenzanalyse von Bildern. Innerhalb der Mathematik kann man mit ihnen Manches einfacher und eleganter darstellen.

## 9.2. Grundidee

Wir betten $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ ein, indem wir $\mathbb{R}$ als die x-Achse $\{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ interpretieren.

Wir suchen eine Erweiterung der Addition und Multiplikation von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$, so dass

a) ihre Einschränkung auf $\mathbb{R}$ die bisherige Addition/Multiplikation liefert:

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0)$$
$$(a,0)\cdot(b,0) = (a\cdot b,0)$$

c) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ein Körper ist.

b) Die Gleichung $z^2=-1$ in $\mathbb{C}$ lösbar ist, d.h. es ex. $z=(a,b)\in\mathbb{C}$ mit $(a,b)\cdot(a,b)=(-1,0)$.

24.11.'06

9.3. Def.: Auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$ sind folgende Verknüpfungen definiert:

a) Addition:

$$(a,b)+(c,d) = (a+c,\ b+d) \quad \forall a,b,c,d\in\mathbb{R}.$$

b) Multiplikation:

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc) \quad \forall a,b,c,d\in\mathbb{R}.$$

## 9.4. Konsequenzen

Mit Def. 9.3 gilt:

a) Einschränkung auf x-Achse liefert Addition / Multiplikation der reellen Zahlen:

$$(a,0) + (c,0) = (a+c,0) \qquad \forall a,c \in \mathbb{R}$$
$$(a,0) \cdot (c,0) = (ac,0)$$

b) Das neutrale Element der Multiplikation in $\mathbb{C}$ ist $(1,0)$:
$$(1,0) \cdot (c,d) = (c,d)$$

c) In $\mathbb{C}$ ex. $\sqrt{-1}$, denn:
$$(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$$
Für $(0,1)$ schreiben wir $i$ (imaginäre Einheit)

## 9.5. Satz (Körpereigenschaft der komplexen Zahlen)

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ bildet einen Körper, den Körper der komplexen Zahlen.

Beweis: Elementar, abgesehen von der Existenz des multiplikativen Inversen:

Für $(a,b) \neq (0,0)$ gilt: $(a,b)^{-1} := \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

Denn:
$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right)$$
$$= (1,0) \qquad \square$$

## 9.6. Praktisches Rechnen mit komplexen Zahlen

Statt $(a,b)$ schreibt man $a+ib$, verwendet $i^2=-1$ (vgl. 9,4. (c)), und rechnet ansonsten wie mit reellen Zahlen.

So erhält man beispielsweise direkt Def. 9.3:

a) Addition:

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

b) Multiplikation:

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac+iad+ibc+\underbrace{i^2}_{-1}bd$$

$$= (ac-bd)+i(ad+bc).$$

9.7. Def.: Bei einer komplexen Zahl $z=a+ib$ heißt $a$ Realteil ($a=\mathrm{Re}(z)$) und $b$ Imaginärteil ($b=\mathrm{Im}(z)$).

Ferner nennt man $\bar{z} := a-ib$ das (komplex) konjugierte Element zu $z$.

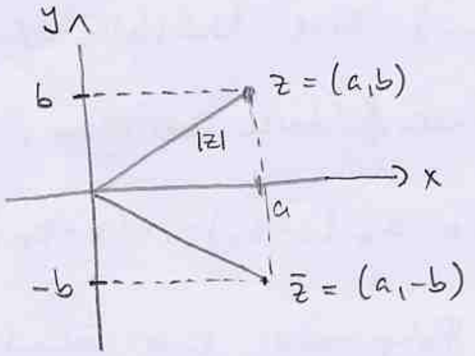
Den Betrag von $z$ definiert man durch

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2-i^2b^2}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}$$

## 9.8. Geometrische Interpretation

Betrachtet man $z = a + ib$ als Vektor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, so ist $\bar{z}$ der an der x-Achse gespiegelte Vektor, und $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist die Länge des Vektors:




## 9.9. Wozu ist das konjugierte Element noch nützlich?

z.B. um bei komplexen Brüchen $\frac{a+ib}{c+id}$ den Nenner reellwertig zu machen. Hierzu erweitert man mit $c - id$:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id}$$

$$= \frac{ac - aid + ibc - i^2 bd}{c^2 + d^2} \quad \leftarrow \text{3. Bin. Formel}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \, .$$

Welche Bedeutung hat die Lösbarkeit von $z^2 = -1$ in $\mathbb{C}$?

Man kann zeigen:

9.10. Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes komplexwertige Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ vom grad $n > 0$ hat (mindestens) eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Man kann $p(z)$ in $n$ Linearfaktoren zerlegen:

$$\exists z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}: \quad p(z) = a_n (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

(Ein Linearfaktor hat für Polynome eine ähnliche Bedeutung wie ein Primfaktor für eine ganze Zahl.)

9.11. Beispiel

$p(z) = 2z^2 - 3z + 5$ hat die Nullstellen (abc-Formel)

$$z_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 \; 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{4}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{31}\sqrt{-1}}{4} = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{31}}{4} i$$

$$\Rightarrow p(z) = 2(z - z_1)(z - z_2)$$

$$= 2\left(z - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{31}}{4} i\right)\left(z - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{31}}{4} i\right).$$

9.12. Bemerkungen

a) Wegen Satz 9.10 sagt man: „$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen".

b) Im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ kann man $\mathbb{C}$ jedoch nicht anordnen.