TEIL B: EINDIMENSIONALE ANALYSIS

Bedeutung in der Informatik

- Analysis beschäftigt sich mit Grenzwerten, Differentiation und Integration
- Viele Phänomene der Natur- und Ingenieurswissenschaften lassen sich mit Hilfsmitteln der Analysis beschreiben
- In der Informatik sehr wichtig z.B. bei Komplexitätsabschätzungen und in physiknahen Bereichen wie Visual Computing

§8: AXIOMATIK DER REELLEN ZAHLEN

8.1. Motivation

- Analysis verwendet grundlegende Eigenschaften von reellen Zahlen.
- Reelle Zahlen sind die Grundlage allen Messens.
- Mit Messergebnissen kann man rechnen, Vergleiche anstellen und Grenzwerte betrachten.
- Wir wollen diese Eigenschaften zunächst formalisieren, um zu sehen, was die reellen Zahlen gegenüber anderen Zahlbereichen (wie $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$) auszeichnet.

Die Rechenregeln auf $\mathbb{R}$ lassen sich durch die Gruppen- und Körperstruktur formalisieren:

8.2. Def.: Eine <u>kommutative (abelsche) Gruppe</u> $(G, \circ)$ besteht aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\circ: G \times G \mapsto G$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Assoziativgesetz:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \qquad \forall a, b, c \in G.$$

b) Neutrales Element:

$$\exists e \in G: \quad a \circ e = a \qquad \forall a \in G$$

c) Inverse Elemente:

Zu jedem $a \in G$ ex. $b \in G$ mit $a \circ b = e$

d) Kommutativgesetz:

$$a \circ b = b \circ a \qquad \forall a, b \in G$$

8.3. <u>Beispiele</u>

a) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit 0 als neutralem Element.

b) $(\mathbb{Z}_m, +)$ ist eine kommutative Gruppe (vgl. 7.10).

c) $(\mathbb{R}, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit 0 als neutralem Element.

d) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit 1 als neutralem Element

8.4. Def.: Ein <u>Körper</u> (engl. field) $(K,+,\cdot)$ besteht aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen $+,\cdot : K \times K \to K$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $(K,+)$ ist eine kommutative Gruppe.
Wir bezeichnen das neutrale Element mit 0 und das Inverse zu $a \in K$ mit $-a$.

b) $(K\setminus\{0\},\cdot)$ ist eine kommutative Gruppe.
Das neutrale Element wird mit 1 bezeichnet und das Inverse zu $a \in K^*$ mit $a^{-1} = \frac{1}{a}$.
Oft setzt man auch $K^* := K \setminus \{0\}$.

c) Es gilt das Distributivgesetz
$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

8.5. <u>Beispiele</u>:

a) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ und $(\mathbb{R},+,\cdot)$ sind Körper.

b) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist kein Körper, da es nicht für jedes $x \in \mathbb{Z}$ ein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}$ gibt.

c) $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ ist ein Körper, falls p eine Primzahl ist. (vgl. 7.10, 7.14, 7.17)

Neben Addition und Multiplikation gibt es in $\mathbb{R}$ auch die Möglichkeit, Vergleiche durchzuführen. Wie läßt sich dies formalisieren?

Bem.: Mit $a-b := a+(-b)$ und $\frac{a}{b} := a b^{-1}$ existieren in einem Körper auch Subtraktion und Division $(b \neq 0)$.

8.6. Def: Ein Körper $(K,+,\cdot)$ heißt <u>angeordnet</u>, wenn es eine Teilmenge P (den <u>Positivbereich</u>) gibt mit

a) P, $\{0\}$ und $-P := \{x \in K \mid -x \in P\}$ bilden eine Partition von K (vgl. 4.8).

b) P ist abgeschlossen bzgl. $+$ und $\cdot$:

$$x, y \in P \Rightarrow x+y \in P,\ x \cdot y \in P$$

8.7. Def.: Sei $(K,+,\cdot)$ ein angeordneter Körper mit Positivbereich P.

Dann sind für $x, y \in K$ folgende Ordnungsbegriffe definiert:

$$x < y \ :\Longleftrightarrow\ y - x \in P$$

$$x \leq y \ :\Longleftrightarrow\ x = y \text{ oder } x < y$$

$$x > y \ :\Longleftrightarrow\ y < x$$

$$x \geq y \ :\Longleftrightarrow\ y \leq x.$$

8.8. <u>Folgerung</u>

Der Positivbereich enthält die positiven Zahlen:

$$x \in P \Rightarrow x > 0$$

Denn: Sei $x \in P$.

0 ist neutrales El. von $(K,+)$ $\Rightarrow$ $0 + 0 = 0$

$\Rightarrow$ $0 = -0$

$\Rightarrow$ $x - 0 \in P$

$\Rightarrow$ $x > 0$. $\square$

Welche Eigenschaften besitzen angeordnete Körper?

8.9. Satz (<u>Eigenschaften angeordneter Körper</u>)

Sei $(K,+,\cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann gilt:

a) Vergleichbarkeit: Seien $x,y \in K$. Dann ist entweder $x<y$ oder $x=y$ oder $x>y$.

b) Transitivität:
$$x<y,\ y<z \Rightarrow x<z \qquad \forall x,y,z \in K.$$

c) Verträglichkeit der Anordnung mit der Addition:
Sei $x<y$ und $z<w \Rightarrow x+z<y+w$.

d) Verträglichkeit der Anordnung mit der Multiplikation:
$$x<y \text{ und } z>0 \Rightarrow xz<yz$$
$$x<y \text{ und } z<0 \Rightarrow xz>yz$$

e) Invertierung:
bzgl. Addition: $x>0 \Rightarrow -x<0$.
$$x<y \Rightarrow -x>-y$$
bzgl. Multiplikation: $0<x<y \Rightarrow 0<y^{-1}<x^{-1}$.

f) Positivität des Quadrats: $x \neq 0 \Rightarrow x^2>0$

<u>Beweis:</u> Übungsaufgabe. $\square$

8.10. Konsequenzen

a) In einem angeordneten Körper $(K,+,\cdot)$ ist $1>0$.

Beweis:

Da $(K^*,\cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1 ist, ist $1 \neq 0$.

Nach 8.9.(f) folgt. $0 < 1^2 = 1$. $\square$

b) Jeder angeordnete Körper K enthält $\mathbb{N}$ als Teilmenge.

Beweis: Aus $0<1$ folgt mit 8.9.(c):

$$1 < \underbrace{1+1}_{=:2} < \underbrace{1+1+1}_{=:3} < \ldots$$ $\square$.

Endliche Körper wie z.B. $\mathbb{Z}_p$ können daher nicht angeordnet sein.

22/11/06

Offensichtlich sind $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ und $(\mathbb{R},+,\cdot)$ angeordnete Körper.
Worin unterscheiden sich $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$?

8.11. Def.: Sei $(K,+,\cdot)$ ein angeordneter Körper und $M \subset K$.
Ein Element $x \in M$ heißt <u>Maximum</u> von M ($x = \max M$), falls $x \geq y \;\forall y \in M$.
$x \in M$ heißt <u>Minimum</u> von M ($x = \min M$), falls $x \leq y \;\forall y \in M$.

8.12. Satz (Eindeutigkeit von Maximum und Minimum)

Hat M ein Maximum oder Minimum, so ist dieses eindeutig bestimmt.

Beweis:

Seien x_1, x_2 zwei Maxima. Dann gilt:

$x_1 \geq x_2$ (da x_1 Maximum)

$x_2 \geq x_1$ (da x_2 Maximum)

Wegen der Vergleichbarkeit 8.9 (a) folgt $x_1 = x_2$ $\quad\square$

8.13. Beispiele

Sei $K = \mathbb{Q}$.

a) $M_1 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 2\}$.

$\Rightarrow \max M_1 = 2$ da $2 \in M_1$ und $x \leq 2 \ \forall x \in M_1$.

b) $M_2 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\}$ hat kein Maximum, denn:

Zu jedem $x \in M_2$ gibt es ein $y \in M_2$ mit $y > x$:

Wähle z.B. $y := \frac{x+2}{2}$.

Dann ist $x < y < 2$.

c) $M_3 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ hat kein Maximum, denn:

Ist x Max., so ist $x^2 = 2$ oder $x^2 < 2$.

Für $x^2 = 2$ ist $x \notin \mathbb{Q}$ (vgl. 3.7)

Für $x^2 < 2$ findet man ähnlich wie in (b) eine Zahl $y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$ und $y^2 < 2$.

8.14. Def.: Sei $(K,+,\cdot)$ ein angeordneter Körper und $M \subset K$. M heißt <u>nach oben beschränkt</u>, wenn es ein $x \in K$ (nicht notwendigerweise aus M) gibt mit $y \leq x \; \forall y \in M$. Dann heißt x <u>obere Schranke</u> von M.
$s \in K$ heißt <u>kleinste obere Schranke</u> (<u>Supremum</u>) von M ($s = \sup M$), wenn für jede andere obere Schranke x gilt:
$x \geq s$.
Analog definiert man <u>nach unten beschränkt</u>, <u>untere Schranke</u> und <u>größte untere Schranke</u> (<u>Infimum</u>)
$r = \inf M$.

8.15. <u>Beispiele</u>

Wir betrachten wieder $K = \mathbb{Q}$ und die Beispiele 8.13.

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 2\}$ hat viele obere Schranken, z.B. 1000, 7, 2.
kleinste obere Schranke: $\sup M_1 = 2$.
M_1 ist nicht nach unten beschränkt.

b) $M_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\}$ hat die gleichen oben Schranke wie M_1.
Obwohl kein Maximum existiert, gibt es ein Supremum:
$\sup M_2 = 2$.

c) $M_3 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ hat viele obere Schranken, z.B. 1000, 7, 1.42.

Es gibt jedoch keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$, da $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Diese Beispiele illustrieren:

a) Wenn eine Menge ein Maximum hat, so ist dieses auch Supremum.

b) Es gibt Mengen, die kein Maximum besitzen, jedoch ein Supremum.

c) In $\mathbb{Q}$ gibt es Mengen, die obere Schranken besitzen, jedoch keine kleinste obere Schranke.

8.16. Def.: Ein angeordneter Körper heißt <u>vollständig</u>, wenn in ihm jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt.

Man kann zeigen:

8.17 Satz (<u>Axiomatische Charakterisierung von $\mathbb{R}$</u>)

Es gibt genau einen vollständigen angeordneten Körper. Es heißt Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Mit der Unbeschränktheit der natürlichen Zahlen zeigt man:

8.18. Satz (Eigenschaften der reellen Zahlen)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) Zu $x, y > 0$ ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$
(Archimedisches „Axiom").

b) Zu $x > 0$ ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x$.

c) Zu $x \in \mathbb{R}$ ex. $m = \max \{ z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x \}$.

8.19. Def.:

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

(Absolut-) Betrag von x

8.20. Satz (Eigenschaften des Betrags)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $|x| \geq 0$
$|x| = 0 \iff x = 0$

b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

c) $|x + y| \leq |x| + |y|$

d) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

e) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

Beweis: Übungsaufgabe