§ 5: ABBILDUNGEN

5.1. Motivation

Wir wollen nun spezielle Relationen betrachten, die in der Praxis sehr wichtig sind. Bei ihnen wird jedem Element einer Menge ein eindeutiges Element einer anderen Menge zugeordnet.

5.2. Def.: Eine Abbildung (Funktion) zwischen zwei Mengen M und N ist eine Vorschrift

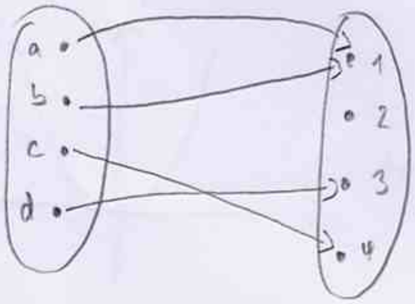
$$f: M \to N,$$

die jedem Element $x \in M$ ein eindeutiges Element $f(x) \in N$ zuordnet.

Schreibweise: $x \mapsto f(x)$

M ist der Definitionsbereich, N der Wertebereich von f.

5.3. Beispiel: $M = \{a, b, c, d\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$



$a \mapsto f(a) = 1$

5.4. Wichtige Begriffe

Für eine Teilmenge $A \subset M$ heißt $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subset N$ das Bild von A.

Für $B \subset N$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in M \mid f(x) \in B\}$ das Urbild von B.

Im Beispiel 5.3:

$$f(\{a,b\}) = \{1\}$$
$$f(\{a,c\}) = \{1,4\}$$
$$f^{-1}(\{3\}) = \{d\}$$
$$f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$$

Hat B nur ein Element, $B = \{y\}$, dann setzt man $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$.

Ist $f: M \to N$ eine Abbildung und $A \subset M$, dann heißt

$$f|_A : A \to N, \qquad A \ni a \longmapsto f(a)$$

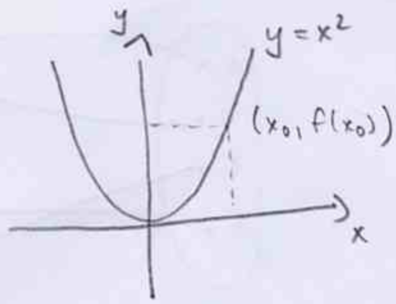
die <u>Einschränkung</u> von f auf A.

Die Relation

$$\Gamma_f := \{(x,y) \in M \times N \mid y = f(x)\}$$

heißt <u>Graph</u> von f.

Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$



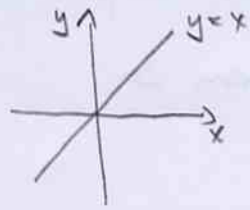
5.5: <u>Reellwertige Funktionen</u>

Funktionen vom Typ $f: D \to \mathbb{R}$ mit einer nichtleeren Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ zählen zu den wichtigsten Abbildungen.

<u>Beispiele</u>:

a) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$

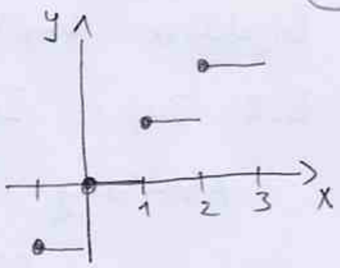
<u>identische Abbildung</u>



b) <u>entier-Funktion</u>

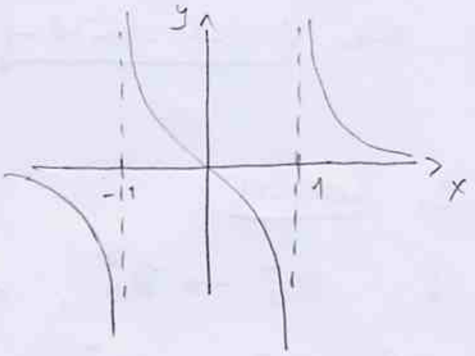
entier : $\mathbb{R} \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

$\text{entier}(x) :=$ größte ganze Zahl $\leq x$



c) $f: D \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \dfrac{x}{x^2 - 1}$

mit $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 1\}$.



5.6. Def.: Eine Abbildung $f: M \to N$ heißt

- <u>surjektiv</u>, wenn es für alle $y \in N$ ein $x \in M$ gibt mit $f(x) = y$ (d.h. $f(M) = N$, „Abbildung <u>auf</u> N")
- <u>injektiv</u> (<u>eineindeutig</u>), wenn keine zwei verschiedenen Elemente von M auf N abgebildet werden:
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$
- <u>bijektiv</u>, wenn f surjektiv und injektiv ist.

5.7. <u>Beispiele</u>

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$ ist
- nicht surjektiv: z.B. hat -1 kein Urbild
- nicht injektiv: z.B. ist $f(2) = 4 = f(-2)$.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad x \mapsto x^2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv

c) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$ ist injektiv, aber nicht surjektiv

d) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Bijektive Abbildungen kann man umkehren:

5.8. Def.: Ist eine Abb. $f: M \to N$ bijektiv, so heißt die Abbildung

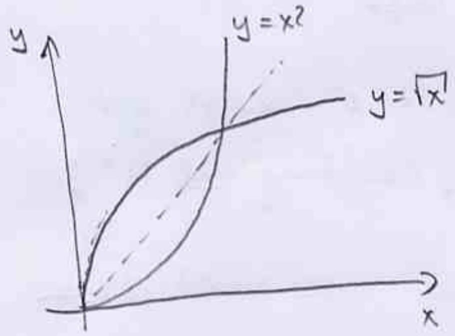
$$f^{-1}: N \to M, \quad y \mapsto x \text{ mit } y = f(x)$$

die <u>Umkehrabbildung</u> von f.

5.9. <u>Beispiel</u>

$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto x^2$ hat die Umkehrabbildung

$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \sqrt{x}$.



Abbildungen lassen sich miteinander verknüpfen:

5.10. Def.: Seien $f: A \to B$ und $g: B \to C$ Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$g \circ f: A \to C, \quad x \mapsto g(f(x))$$

die <u>Verknüpfung</u> (<u>Komposition</u>, <u>Hintereinanderschaltung</u>) von f und g.

Sprechweise: „g verknüpft mit f“,

„g Kringel f“

5.11 Satz (<u>Assoziativität der Verknüpfung</u>)

Seien $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ Abbildungen.
Dann gilt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

D.h. die Verknüpfung ist assoziativ.

<u>Beweis:</u> Ist $x \in A$, so gilt

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= h((g \circ f)(x)) \\ &= (h \circ (g \circ f))(x). \end{aligned}$$

□

5.12. <u>Vorsicht</u>: Die Verknüpfung von Abbildungen ist i.A. <u>nicht</u> kommutativ!

Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x+1$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(x^2) = x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

d.h. $f \circ g \neq g \circ f$

Die Verknüpfung kann auch als Nachweis von Injektivität, Surjektivität und Bijektivität dienen:

5.13. Satz (Kriterium für Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)

Sei $f: X \to Y$ eine Abb. zwischen den nichtleeren Mengen X und Y. Dann gilt:

a) f ist injektiv $\iff \exists g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$.

b) f ist surjektiv $\iff \exists g: Y \to X$ mit $f \circ g = id_Y$.

c) f ist bijektiv $\iff \exists g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$.

In diesem Fall ist g die Umkehrabb. f^{-1}

Beweis:

a) „$\Rightarrow$": Sei f injektiv. Dann ex. zu jedem $y \in f(X)$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Setze $g(y) := x$.
Für alle $y \in Y \setminus f(X)$ setzen wir $g(y) := x_0$ mit $x_0 \in X$ beliebig.
Dann ist $g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$.

„$\Leftarrow$": Sei $g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$ gegeben.
Sei ferner $f(x_1) = f(x_2)$.
$\Rightarrow \quad x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$
d.h. f ist injektiv.

b) „$\Rightarrow$" Sei f surjektiv. Zu jedem $y \in Y$ wählen wir ein festes $x \in X$ mit $f(x) = y$ und setzen $g(y) := x$.
Dann hat $g: Y \to X$ die Eigenschaft $f \circ g = id_Y$.

„$\Leftarrow$" Sei $g: Y \to X$ mit $f \circ g = id_Y$ gegeben. Sei $y \in Y$.
$\Rightarrow y = f(g(y))$, d.h. $y \in f(X)$. Also ist f surjektiv.

c) folgt direkt aus (a) und (b) sowie der Def. der Umkehrabb. $\square$

5.14. Mächtigkeit von Mengen

Def.: Eine nichtleere Menge M heißt endlich, falls ein $n \in \mathbb{N}$ ex. und eine bijektive Abb. $f : \{1, \dots, n\} \to M$.
n ist eindeutig bestimmt und heißt die Mächtigkeit (Kardinalität) von M. Schreibweise $|M| := n$.
Der leeren Menge ordnet man die Kardinalität 0 zu.
Man kann die Elemente von M aufzählen:
$M = \{m_1, \dots, m_n\}$, wobei $f(i) = m_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$

Ist M nicht endlich, so heißt M unendlich.
Zwei Mengen sind gleichmächtig, falls eine bijektive Abb. zwischen ihnen existiert.

Wir nennen eine Menge M abzählbar, falls eine bijektive Abb. $f : M \to \mathbb{N}$ existiert. Als Symbol für die Mächtigkeit $|\mathbb{N}|$ benutzen wir $\aleph_0$ („aleph 0").

5.15. Beispiele

a) $|\{5, 7, 2, 9\}| = 4$.

b) $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$, denn mit $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ ergibt sich eine Aufzählung mit der bijektiven Abb.:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{für gerades } n \\ -\frac{n-1}{2} & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

5.16 Satz (Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$)

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar : $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Beweis (Cantor):

Wir beschränken uns zunächst auf $\mathbb{Q}^+ := \{ q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \}$. Die Elemente von $\mathbb{Q}^+$ lassen sich nach folgendem Schema anordnen:

$$
\begin{array}{lcccccc}
(\text{Nenner } 1) & 1 & \rightarrow & 2 & 3 & \rightarrow & 4 \quad \cdots \\
(\text{Nenner } 2) & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} \quad \cdots \\
 & \downarrow & & & & & \\
(\text{Nenner } 3) & \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} \quad \cdots \\
 & \frac{1}{4} & & \cdots & & & \\
 & \downarrow & & & & &
\end{array}
$$

Durch Weglassen doppelter Elemente entsteht die Anordnung

$$1,\ 2,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ 3,\ 4,\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \ldots$$

die sich bijektiv auf $\mathbb{N}$ abbilden lässt.
Analog wie in 5.15 (b) lässt sich der Beweis auf ganz $\mathbb{Q}$ ausdehnen. $\square$

Bem.: Nicht alle unendlichen Mengen sind gleichmächtig.

Z.B. ist $\mathbb{R}$ überabzählbar (d.h. nicht abzählbar).

5.17. Satz (<u>Äquivalenz von Surjektivität und Injektivität</u>)

Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung zwischen <u>endlichen</u>, <u>gleichmächtigen</u> Mengen X und Y. Dann sind äquivalent:

a) f ist injektiv.

b) f ist surjektiv

c) f ist bijektiv.

<u>Beweis</u>: Wegen der Def. der Bijektivität genügt es, (a) $\Leftrightarrow$ (b) zu zeigen.

„(a) $\Rightarrow$ (b)":

Sei $f: X \to Y$ injektiv

$\Rightarrow |f^{-1}(y)| \leq 1 \quad \forall y \in Y$ (einige $y \in Y$ könnten kein Urbild haben)

$$\Rightarrow |X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| \leq \sum_{y \in Y} 1 = |Y|$$

Wegen $|X| = |Y|$ muss $|f^{-1}(y)| = 1 \quad \forall y \in Y$ gelten.

$\Rightarrow$ f ist surjektiv, da jedes El. aus Y zu $f(X)$ gehört.

„(b) $\Rightarrow$ (a)":

Sei $f: X \to Y$ surjektiv. $\Rightarrow |f^{-1}(y)| \geq 1 \quad \forall y \in Y$ (mehrere Urbilder möglich)

$$\Rightarrow |Y| = \sum_{y \in Y} 1 \leq \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| = |Y|$$

Wegen $|X| = |Y|$ muss $|f^{-1}(y)| = 1 \quad \forall y \in Y$ gelten.

$\Rightarrow$ f ist injektiv, da keine zwei El. aus X auf dasselbe $y \in Y$ abgebildet werden.

$\square$

5.18. <u>Folgerungen</u>

Aus dem Beweis von 5.17 folgt für endliche Mengen X, Y:

a) Ist $f: X \to Y$ injektiv, dann ist $|X| \leq |Y|$

b) Ist $f: X \to Y$ surjektiv, dann ist $|X| \geq |Y|$

Die Kontraposition zu (a) ergibt:

5.19. Satz (<u>Schubfachprinzip</u>)

Seien X, Y endliche Mengen. Dann ist eine Abbildung $f: X \to Y$ mit $|X| > |Y|$ nicht injektiv

<u>Anders formuliert</u>:

Seien m Objekte in n Kategorien („Schubfächer") eingeteilt. Wenn $m > n$ ist, gibt es mindestens eine Kategorie, die mehr als 1 Objekt enthält.

5.20. <u>Beispiele</u>

a) Unter 13 Personen gibt es mindestens 2, die im selben Monat Geburtstag haben.

c) In jeder Gruppe von mindestens 2 Personen gibt es zwei, die die gleiche Anzahl von Bekannten innerhalb dieser Gruppe haben. Dabei sei „bekannt" eine symmetrische, nicht reflexive Relation.

<u>Beweis</u>:

Objekte: alle m Personen der Gruppe

Kategorien: Personen mit gleicher Zahl von Bekannten.

$K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}$: Personen mit $0, 1, \ldots, m-1$ Bekannten.

Schubfachprinzip nicht direkt anwendbar, da Objektzahl m identisch mit Kategorienzahl.

Es gibt jedoch eine Kategorie, die nicht auftritt:

Denn: Angenommen, eine Person ist in K_{m-1}

$\Rightarrow$ Sie kennt alle anderen

$\Rightarrow$ Alle anderen haben mind. 1 Bekannten

$\Rightarrow$ K_0 ist leer.

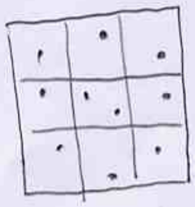
Falls keine Person in K_{m-1} ist, ist K_{m-1} leer.

Also ist das Schubfachprinzip anwendbar

b) Für beliebige n^2+1 Punkte im Quadrat

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < n,\ 0 < y < n\}$$

gibt es zwei mit Abstand $\le \sqrt{2}$.



$n = 3$

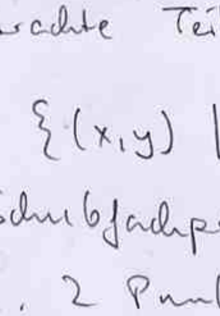
10 Punkte

Beweis: Betrachte Teilquadrate

$$Q_{i,j} = \{(x,y) \mid i-1 \le x < i,\ j-1 \le y < j\}$$

Nach dem Schubfachprinzip müssen in einem der n^2 Fächer mind. 2 Punkte liegen.

Der Maximalabstand in einem solchen Einheitsquadrat ist $\sqrt{2}$:



$\square$.