§4: RELATIONEN

4.1. Motivation

Wir möchten
- die Elemente zweier Mengen in Beziehung setzen
- eine Menge in Klassen „ähnlicher" Elemente zerlegen
- die Elemente innerhalb einer Menge ordnen.

In der Informatik sind solche Fragen z.B. bei relationalen Datenbanken wichtig.

4.2. Def.:

Seien A, B nichtleere Mengen. Eine Relation auf $A \times B$ ist eine Teilmenge $R \subset A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$.

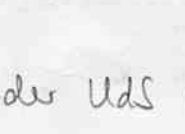
Für $(x,y) \in R$ sagt man:

„x steht in Relation R zu y."

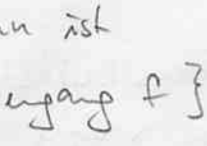
Man schreibt auch $x R y$.

4.3. Beispiele

a) $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$



$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$



sind Relationen auf $\mathbb{R}^2$.

b) Sei S die Menge der Studierenden der UdS und F die Menge der Studiengänge. Dann ist

$B = \{(s,f) \mid s$ belegt den Studiengang $f\}$

eine Relation auf $S \times F$. In relationalen Datenbanken werden Datensätze durch solche Relationen beschrieben.

4.4. Def.: Eine Relation $R \subset A \times A$ heißt

- reflexiv, falls $x R x \quad \forall x \in A$.
- symmetrisch, falls $x R y \Rightarrow y R x \quad \forall x, y \in A$
- transitiv, falls aus $x R y$ und $y R z$ stets $x R z$ folgt.

Ist eine Relation R reflexiv, symmetrisch und transitiv, so heißt sie Äquivalenzrelation auf A.

Statt $x R y$ schreibt man dann auch $x \sim y$.

4.5. Beispiele

a) Sei A die Menge aller Einwohner von Deutschland. Wir definieren die Relation

$x R y :\Leftrightarrow$ x und y haben ihren Wohnsitz in der selben Stadt.

Dann ist R eine Äquivalenzrelation.

b) $A := \mathbb{Z}$. Betrachte die Relation

$$R_5 := \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x-y \text{ ist ohne Rest durch } 5 \text{ teilbar} \}.$$

Dann gilt:

i) Reflexivität:

$x R_5 x \ \forall x \in \mathbb{Z}$, da $x - x = 0$ durch 5 teilbar ist

ii) Symmetrie:

Sei $x R_5 y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \ x - y = 5k$

$$\Rightarrow y - x = 5 \cdot \underbrace{(-k)}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow y R_5 x$$

iii) Transitivität:

Sei $x R_5 y$ und $y R_5 z$.

$\Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}: \ x-y = 5k, \ y - z = 5l$

$\Rightarrow x - z = (x-y) + (y-z) = 5(k+l)$ d.h. $x R_5 z$.

Damit ist R_5 eine Äquivalenzrelation.

c) $A := \mathbb{R}$.

$S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$

S ist keine Äquivalenzrelation: nicht reflexiv, nicht symmetrisch.

Äquivalenzrelationen erlauben eine Zerlegung in Klassen:

4.6. Def.: Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A und $a \in A$.

Dann heißt

$$[a] := \{x \in A \mid x \sim a\}$$

die <u>Äquivalenzklasse</u> von a. Die Elemente von $[a]$ heißen die zu a <u>äquivalenten</u> Elemente.

4.7. <u>Beispiel</u>

Sei R_5 definiert wie in 4.5.(b). Dann ist

$$[a] := \{x \in \mathbb{Z} \mid x - a \text{ ist durch 5 teilbar}\}$$

Insbesondere gilt:

$$[0] := \{0, 5, 10, 15, \dots, -5, -10, -15, \dots\}$$
$$[1] := \{1, 6, 11, 16, \dots, -4, -9, -14, \dots\}$$
$$[2] := \{2, 7, 12, 17, \dots, -3, -8, -13, \dots\}$$
$$[3] := \{3, 8, 13, 18, \dots, -2, -7, -12, \dots\}$$
$$[4] := \{4, 9, 14, 19, \dots, -1, -6, -11, \dots\}$$

Offenbar gilt: $[5] = [0]$, $[6] = [1]$, ...

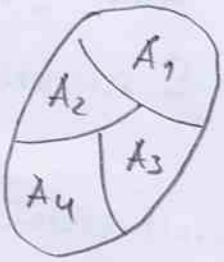
Man nennt $\mathbb{Z}_5 := \{[0], [1], \dots, [4]\}$ die <u>Restklassen</u> von $\mathbb{Z}$ modulo 5. Es gilt $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup \dots \cup [4]$ und $[0], \dots, [4]$ sind disjunkt. Ist dies Zufall?

4.8. Def.: Eine Partition einer Menge A ist eine Menge $P = \{A_1, A_2, \dots\}$ von nicht leeren Teilmengen von A mit

a) $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$

b) $\bigcup_i A_i = A$.

Man schreibt auch $A = \dot{\bigcup_i} A_i$.



4.9. Satz (Partitionseigenschaft von Äquivalenzklassen)

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Dann bildet die Menge der Äquivalenzklassen eine Partition von A.

Beweis:

a) Seien B, C Äquivalenzklassen von A. Durch Kontraposition zeigen wir: Falls $B \neq C$, so sind B und C disjunkt.

Seien also B, C nicht disjunkt: $B \cap C \neq \emptyset$

Seien $[b] = B$, $[c] = C$ und $y \in B \cap C$.

Um $B = C$ zu zeigen, beweisen wir $B \subset C$ und $C \subset B$:

„$B \subset C$": Sei $x \in B \Rightarrow x \sim b$
Da $y \in B \rightarrow y \sim b \overset{\text{Symm.}}{\Rightarrow} b \sim y$ $\Big\}$ $\overset{\text{trans.}}{\Longrightarrow} x \sim y$
Wegen $y \in C$: $\Rightarrow y \sim c$
$\Big\}$ $\Rightarrow x \sim c$ d.h. $x \in C$.

„$C \subset B$": geht auf die selbe Weise

b) Für jedes $x \in A$ ist $x \in [x]$ (wg. Reflexivität)

$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} [x]$. $\square$.

Eine Äquivalenzrelation verhält sich im Prinzip wie $=$.
Wie lassen sich Relationen charakterisieren, die sich wie $\leq$ verhalten, d.h. als Ordnungsrelation wirken?

4.10. Def.: Sei $A \neq \emptyset$. Eine Relation $R \subset A \times A$ heißt Teilordnung auf A, wenn gilt:

a) R ist reflexiv: $xRx \quad \forall x \in A$.

b) R ist transitiv: $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz \quad \forall x,y,z \in A$.

c) R ist antisymmetrisch: $xRy,\ yRx \Rightarrow x=y \quad \forall x,y \in A$.

Ferner heißt R total, wenn xRy oder yRx für alle $x,y \in A$ gilt, d.h. wenn x und y stets vergleichbar sind.
Eine totale Teilordnung nennen wir auch (Total-) Ordnung.

4.11. Beispiele

a) Die Relation „$\leq$" definiert eine Teilordnung auf $\mathbb{R}$:

i) reflexiv: $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) transitiv: $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

iii) antisymmetrisch: $x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x=y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Da $x \leq y$ oder $y \leq x$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$ gilt, ist $\leq$ sogar eine Totalordnung.

b) Sei M eine Menge. Betrachte Relation $\subset$ auf Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.
Dann ist $\subset$ eine Teilordnung auf $\mathcal{P}(M)$:

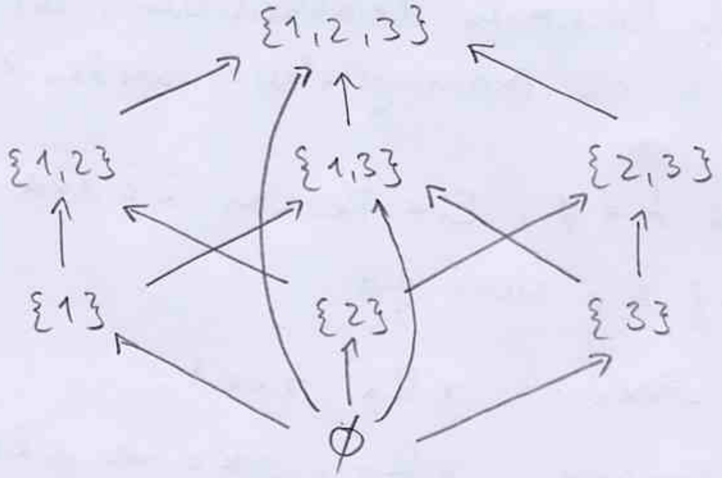
i) reflexiv: $A \subset A \quad \forall A \in \mathcal{P}(M)$

ii) transitiv: $A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C \quad \forall A,B,C \in \mathcal{P}(M)$

iii) antisymmetrisch: $A \subset B,\ B \subset A \Rightarrow A = B \quad \forall A,B \in \mathcal{P}(M)$

Allerdings ist $\subset$ keine Totalordnung:

Betrachte etwa $M = \{1,2,3\}$. Dann gilt:



Dabei symbolisiert $\rightarrow$ die Relation $\subset$.
Die Relation $\subset$ ist keine Totalordnung in $P(M)$, da es nicht vergleichbare Elemente gibt, z.B. $\{2\}$ und $\{1,3\}$.

c) Sei M die Menge der englischen Wörter mit 4 Buchstaben. Verwendet man die alphabetische Ordnung und vereinbart, dass Großbuchstaben vor Kleinbuchstaben kommen, liegt eine Totalordnung vor (<u>lexikographische Ordnung</u>).