§ 2: AUSSAGENLOGIK

Mein teurer Freund, ich rat' Euch drum
Zuerst Collegium Logicum
Goethe, Faust I

2.1. Bedeutung in der Informatik

- Schaltkreisentwurf
- automatisches Beweisen, Verifikation
- Anfragen an Suchmaschinen im Internet

2.2. Def.:

Eine Aussage ist ein Satz einer menschlichen oder künstlichen Sprache, dem eindeutig einer der Wahrheitswerte wahr (1) oder falsch (0) zugeordnet werden kann.

2.3. Beispiele

a) „Saarbrücken liegt am Rhein" (falsch)

b) „$3 < 5$" (wahr)

2.4. Verknüpfung von Aussagen

Wir definieren die Verknüpfungen

$\neg A$: „nicht A" (Negation)

$A \wedge B$: „A und B" (Konjunktion)

$A \vee B$: „A oder B" (Disjunktion)

$A \Rightarrow B$: „A impliziert B" (Implikation)

$A \Leftrightarrow B$: „A ist äquivalent zu B" (Äquivalenz)

mittels der Wahrheitswertetafel

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

2.5. Anmerkungen

a) $A \vee B$ ist auch wahr, wenn A und B wahr sind (kein „entweder ... oder")

b) Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist immer wahr, wenn die Prämisse (das ist Aussage A) falsch ist. Aus falschen Aussagen können auch wahre Aussagen folgen.

Bsp.: „$1 = -1$" ist falsch

Quadrieren liefert die wahre Aussage „$1 = 1$".

c) $A \Rightarrow B$ ist nicht das selbe wie $B \Rightarrow A$.

Bsp.: A: „Schnuffi ist ein Dackel"

B: „Schnuffi ist ein Hund"

A impliziert B, aber B impliziert nicht notwendigerweise A.

25.10.'06

2.6. Def.: Ein logischer Ausdruck ist eine Tautologie, falls sich für alle Kombinationen der Argumente eine wahre Aussage ergibt.

2.7. <u>Beispiel</u>: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Denn es gilt:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Mit Hilfe der Wahrheitswertetafeln zeigt man:

2.8. Satz (<u>Wichtige Tautologien</u>)

a) $A \vee \neg A$ — Satz v. ausgeschl. Dritten.

b) $\neg(A \wedge \neg A)$ — Satz vom Widerspruch

c) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ — doppelte Verneinung

d) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ } Kommutativgesetze

e) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ } Distributivgesetze

f) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ } de Morgan'sche Gesetze

g) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ — Kontraposition (vgl. 2.7)

h) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$

i) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ } Assoziativgesetze

j) $A \vee A \Leftrightarrow A$
$A \wedge A \Leftrightarrow A$ } Idempotenz

Häufige Konvention der Prioritäten: 1. $\neg$ 2. $\wedge$ 3. $\vee$ 4. $\Rightarrow$ 5. $\Leftrightarrow$

Gleichrangige Verknüpfungen werden von links nach rechts ausgewertet. Klammerung erlaubt eine andere Reihenfolge der Auswertung und ist in Zweifelsfällen stets empfehlenswert

2.9. Bemerkung

Man kann zeigen, dass sich Resultate der Mengenlehre (z.B. 1.9, 1.10) und der Aussagenlehre (z.B. 2.8) in einander überführen lassen, wenn man folgende Übersetzung vornimmt (M: Grundmenge):

Mengenlehre	$\emptyset$	M	$\cap$	$\cup$	^{c}	$=$
Aussagenlehre	0	1	$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\Leftrightarrow$

Das liegt daran, dass in beiden Fällen die selbe algebraische Grundstruktur zugrunde liegt (Boole'sche Algebra, MfI 2)

2.10. Beispiel einer Tautologie

Mit Satz 2.8 zeigen wir: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Beweis:

$(((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

$\overset{(h)}{\Longleftrightarrow} (\neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \vee (A \Rightarrow C))$ $\quad ((x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y))$

$\overset{(f)}{\Longleftrightarrow} (\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow C)) \vee (A \Rightarrow C))$ $\quad$ (de Morgan)

$\overset{(h)}{\Longleftrightarrow} ((\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee C)) \vee (\neg A \vee C))$ $\quad ((x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y))$

$\underset{(c)}{\overset{(f)}{\Longleftrightarrow}} (((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C)) \vee (\neg A \vee C))$ $\quad$ (de Morgan)

$\overset{(d)}{\Longleftrightarrow} ((A \wedge \neg B) \vee \neg A \vee (B \wedge \neg C) \vee C)$ $\quad$ (Kommut.)

$\overset{(e)}{\Longleftrightarrow} ((\underbrace{A \vee \neg A}_{1}) \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee (B \vee C) \wedge (\underbrace{\neg C \vee C}_{1}))$ $\quad$ (Distrib.)

$\overset{(a)}{\Longleftrightarrow} (1 \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee (B \vee C) \wedge 1)$ $\quad (A \vee \neg A \Leftrightarrow 1)$

$\Longleftrightarrow ((\neg B \vee \neg A) \vee (B \vee C))$ $\quad (1 \wedge x \Leftrightarrow x)$

$\overset{(i),(d)}{\Longleftrightarrow} ((\neg B \vee B) \vee \neg A \vee C)$ $\quad$ (Assoz., Komm.)

$\overset{(a)}{\Longleftrightarrow} (1 \vee \neg A \vee C)$ $\quad (A \vee \neg A \Leftrightarrow 1)$

$\Longleftrightarrow 1$ $\quad (1 \vee x \Leftrightarrow 1)$

$\square$

2.11 Quantoren

dienen zur kompakten Schreibweise logischer Ausdrücke.

$\forall$: für alle

$\exists$: es existiert ein

$\exists!$: es existiert genau ein

$\nexists$: es existiert kein.

Beispiel: $\forall x: A(x)$ „für alle x gilt Aussage $A(x)$"

2.12. Negation von Aussagen

Negation vertauscht $\forall$ und $\exists$, und sie negiert die Aussage:

$$\neg(\exists x\ A(x)) \iff \forall x\ (\neg A(x))$$

$$\neg(\forall x\ A(x)) \iff \exists x\ (\neg A(x))$$

Bsp.: „Alle Radfahrer haben krumme Beine".

Negation:

„Es gibt einen Radfahrer, der keine krummen Beine hat".

Bei komplizierteren Ausdrücken geht man sukzessive vor:

Bsp.: $\neg(\exists y\ \forall x\ A(x,y))$

$\iff \forall y\ \neg(\forall x\ A(x,y))$

$\iff \forall y\ \exists x\ \neg A(x,y)$