TEIL A: DISKRETE MATHEMATIK

§ 1: MENGEN

1.1. Motivation

Der Mengenbegriff ist von grundlegender Bedeutung in vielen Gebieten der Informatik, z.B. bei Datenbanken.

1.2. Def.:

Unter einer Menge M verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten der Anschauung oder des Denkens, welche die Elemente von M genannt werden, zu einem Ganzen.

1.3. Anmerkungen

a) Dieser Mengenbegriff geht auf Georg Cantor (1845 - 1918) zurück. Er begründete die moderne Mengenlehre.

b) Er ist nicht unumstritten und widerspruchsfrei, genügt jedoch unseren Anwendungen.

Bsp.: Der Barbier rasiert alle Menschen, die sich nicht selbst rasieren können.
Gehört er zur Menge derer, die sich rasieren können?

c) Die Elemente einer Menge werden in geschweiften Klammern eingeschlossen.

Beispiel: $M = \{4, 1, 5\}$

d) Die Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle. Wir unterscheiden also nicht zwischen $\{4,1,5\}$ und $\{1,4,5\}$. Ebenso spielen Wiederholungen keine Rolle: Wir identifizieren also $\{1,4,5\}$ und $\{1,1,4,5\}$.

e) Symbole für wichtige Mengen:

$$\mathbb{N} := \{x \mid x \text{ ist natürliche Zahl}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

„ist definiert durch" „mit der Eigenschaft"

$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ natürlichen Zahlen mit 0

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} := \{x \mid x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$: reellen Zahlen.

$\emptyset, \{\}$: leere Menge (enthält kein Element)

f) Mengen können wieder Mengen enthalten.

Beispiel: $M = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$ dreielementige Menge

1.4. Def.:

a) A heißt Teilmenge von B ($A \subset B$ oder $B \supset A$), wenn jedes Element von A auch Element von B ist:

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

(„$\Rightarrow$" bedeutet: „daraus folgt"
„$\in$" bedeutet: „ist Element aus")

b) In diesem Fall nennt man B auch <u>Obermenge</u> von A.

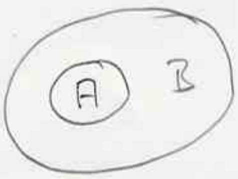
c) Zwei Mengen A und B sind <u>gleich</u> $(A = B)$, falls $A \subset B$ und $B \subset A$. Andernfalls sind sie <u>ungleich</u> $(A \neq B)$.

d) Falls $A \subset B$ und $A \neq B$, schreibt man auch $A \subsetneq B$. und sagt: A ist <u>echt enthalten</u> in B.

e) Ist A nicht Teilmenge von B, so schreibt man $A \not\subset B$.

1.5. <u>Bemerkungen</u>

a) Beziehungen zwischen Mengen kann man durch so genannte <u>Venn-Diagramme</u> veranschaulichen



$A \subset B$

$A \not\subset B$:

b) $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge A

Warum?

Es gibt kein Element in $\emptyset$, das nicht zu A gehört.

1.6. <u>Def.</u>:

Ist M eine Menge, so heißt

$$P(M) := \{ X \mid X \subset M \}$$

<u>Potenzmenge</u> von M.

20.10.06

1.7. Beispiele

a) $M = \{1, 2\}$.

$P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

b) $M = \{a, b, c\}$

$P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

c) $M = \emptyset$

$P(M) = \{\emptyset\}$.

Allgemein gilt:
Die Potenzmenge einer n-elementigen Menge enthält 2^n Elemente.

1.8. Operationen mit Mengen

Durchschnitt (Schnittmenge) zweier Mengen M und N:

$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$

M und N heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$ ist

Bsp.: $M = \{1, 3, 5\}$, $N = \{2, 3, 5\}$, $S = \{5, 7, 8\}$.

$M \cap N = \{3, 5\}$

$(M \cap N) \cap S = \{5\}$

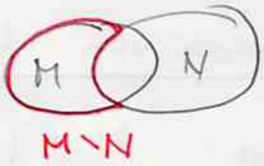
Vereinigung zweier Mengen M und N:

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$$

Dabei darf x auch in beiden Mengen sein („oder" ist kein „exklusives oder").

Differenzmenge:

$$M \setminus N := M - N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$$



$M \setminus N$ heißt auch Komplement von N in M.

Schreibweise: $\overline{N}^M$

Wenn die Grundmenge M klar ist, schreibt man meist $\overline{N}$, $\complement N$ oder N^C.

1.9. Satz: (Rechenregeln für Durchschnitte und Vereinigungen)

Seien M, N, S Mengen. Dann gelten folgende Gesetze.

a) Kommutativgesetze:

i) $M \cup N = N \cup M$

ii) $M \cap N = N \cap M$

b) Assoziativgesetze:

i) $(M \cup N) \cup S = M \cup (N \cup S)$

ii) $(M \cap N) \cap S = M \cap (N \cap S)$

c) Distributivgesetze:

i) $(M \cup N) \cap S = (M \cap N) \cup (N \cap S)$

ii) $M \cup (N \cap S) = (M \cup N) \cap (M \cup S)$

Ferner gilt für jeden Menge M:

d) i) $M \cup \emptyset = M$.

ii) $M \cap \emptyset = \emptyset$.

iii) $M \setminus \emptyset = M$.

Beweis von (c)(i):

zeige: $\underbrace{M \cap (N \cup S)}_{=:A} = \underbrace{(M \cap N) \cup (M \cap S)}_{=:B}$

Um $A = B$ zu zeigen zeigen wir $A \subset B$ und $B \subset A$.

„$A \subset B$":

Sei $x \in A \Rightarrow x \in M$ und ($x \in N$ oder $x \in S$).

Falls $x \in N$: $\Rightarrow x \in M \cap N$

$\Rightarrow x \in (M \cap N) \cup (M \cap S) = B$.

Falls $x \in S$: $\Rightarrow x \in M \cap S$

$\Rightarrow x \in (M \cap N) \cup (M \cap S) = B$.

„$B \subset A$":

Sei $x \in B \Rightarrow x \in M \cap N$ oder $x \in M \cap S$

Falls $x \in M \cap N$:

$\Rightarrow x \in M$ und $x \in N$

$\Rightarrow x \in N \cup S$ (wegen $x \in N$)

$\Rightarrow x \in M \cap (N \cup S) = A$ (wegen $x \in M$)

Falls $x \in M \cap S$:

$\Rightarrow x \in M$ und $x \in S$

$\Rightarrow x \in N \cup S$ (wegen $x \in S$)

$\Rightarrow x \in M \cap (N \cup S) = A$ (wegen $x \in M$) $\square$

Beweisende

1.10. Satz: (Rechenregeln für Komplementbildung)

Bei Mengen M, N innerhalb einer Grundmenge G gilt:

a) $M \setminus N = M \cap \overline{N}$

b) De Morgan'schen Regeln:

i) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

ii) $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$

c) Aus $M \subset N$ folgt $\overline{N} \subset \overline{M}$

„Komplementbildung kehrt die Operatoren um".

Beweis: Übungsaufgabe.

1.11. Unendliche Durchschnitte und Vereinigungen

Def.: Sei M eine Menge von Indizes (z.B. $M = \mathbb{N}$)

Für alle $n \in M$ sei eine Menge A_n gegeben. Dann ist

$$\bigcup_{k \in M} A_k = \{ x \mid x \in A_i \text{ für (mindestens) ein } i \in M \}$$

$$\bigcap_{k \in M} A_k = \{ x \mid x \in A_i \text{ für alle } i \in M \}$$

Für endliche Mengen, z.B. $M = \{1, \dots, n\}$ stimmt diese Definition mit der bisherigen Def 1.8 überein.

Man schreibt dann auch

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

(Wegen der Assoziativgesetze 1.9. (b) ist keine Klammerung nötig).

1.12. Beispiel

$M := \mathbb{N}$, $\quad A_k := \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{k} \}$

$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_n$ (endlicher Schnitt)

Für den unendlichen Schnitt $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ gilt jedoch:

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$$

(Es gibt keine positive Zahl x, die $0 < x < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt).

1.13. Def.: Seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ nichtleere Mengen. Dann heißt die Menge der geordneten n-Tupel

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n \}$$

das <u>kartesische Produkt</u> der Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$
(nach René Descartes (Cartesius), 1596–1650, Philosoph und Begründer der Analytischen Geometrie.)

Statt $M_1 \times \ldots \times M_n$ schreibt man auch $\bigtimes_{k=1}^{n} M_k$ oder $\prod_{k=1}^{n} M_k$.

Ist $M_1 = \ldots = M_n =: M$, schreibt man M^n statt $\prod_{k=1}^{n} M_k$.

1.14. <u>Beispiele</u>:

a) $M = \{1, 2\}$, $N = \{a, b, c\}$

$M \times N = \{ (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c) \}$

$N \times M = \{ (a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2) \}$

Im Allgemeinen ist also $M \times N \neq N \times M$.

b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$