Mathematik für Informatiker I

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Michael Breuß

Wintersemester 2006/2007
Ausgabe: 01.12.2006
Abgabe: 08.12.2006 **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Beweisen Sie:

(a) Sind (a_n), (b_n) konvergente reelle Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \, .$$

(b) Ist (a_n) eine konvergente reelle Folge, so ist (a_n) auch eine Cauchy-Folge.

(6 Punkte)

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie die Grenzwerte der nachstehenden Folgen:

(i) $a_n = \left(\frac{5n}{2n+1}\right)^4$.

(ii) $b_n = \frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1}$.

(iii) $c_n = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{7n}$.

(iv) $d_n = \sqrt{n(n+3)} - n$.

(4 Punkte)

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die nachstehende rekursiv definierte Folge (e_n) konvergiert. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$e_1 = 2, \; e_{n+1} = \frac{3}{4-e_n}, \; n \geq 1 \quad .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3

Beweisen Sie die Gültigkeit des *Prinzips der Intervallschachtelung* in den angegebenen Schritten (i)-(iii). Dieses lautet mathematisch formuliert folgendermaßen.

(i) Sind (a_n), (b_n) reelle Folgen mit den Eigenschaften

(a) (a_n) ist monoton wachsend,

(b) (b_n) ist monoton fallend,

(b) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq b_n$,

so sind beide Folgen konvergent.

(ii) Gilt überdies

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0\,,$$

so besitzen sie einen gemeinsamen Grenzwert:

$$\beta \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n \;=\; \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

(iii) Schließlich gelten die Fehlerabschätzungen

$$|a_n - \beta| \leq |b_n - a_n|\;, \qquad |b_n - \beta| \leq |b_n - a_n|\;.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4

Die nachstehenden Folgen sind allesamt „Groß-Oh“ von einer Folge v_n, definiert durch $v_n = n^q$ mit $q \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie q für:

(a) $a_n = n + n^2 + n^3 \quad .$

(b) $b_n = \dfrac{1}{n + n^2 + n^3} \quad .$

(c) $c_n = \big(5n^4 + 3n^2 + 6\big) \cdot \big(3n^3 + 4n^2 + 2n\big) \quad .$

(d) $d_n = \dfrac{3n^7 + n^5 + 4n^3}{12n^4 + n^2 + 8} \quad .$

(4 Punkte)