Mathematik für Informatiker I

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Michael Breuß

Wintersemester 2006/2007
Ausgabe: 17.11.2006
Abgabe: 24.11.2006 **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Gegeben sei der Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Wir betrachten als Beispiel die Aussage:

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $-(-x) = x$.

Nimmt man lediglich die Körperaxiome zu Hilfe, so beweist man die Gültigkeit dieser Aussage etwa wie folgt: Nach Definition des Inversen Elementes der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ gilt $(-x)+(-(-x)) = 0$. Andererseits gilt nach dieser Definition auch $(-x)+x = 0$. Aus der Eindeutigkeit des Inversen Elementes der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ (siehe Aussage (b)) folgt $-(-x) = x$.

Beweisen Sie nun lediglich unter Zuhilfenahme der Körperaxiome die folgenden Eigenschaften:

(a) Das Neutrale Element 0 der additiven Verknüpfung ist eindeutig.

(b) Das Inverse Elemente der additiven Verknüpfung ist eindeutig.

(c) Die Gleichung $a + x = b$ hat (Tip: Existenz!) eine eindeutig bestimmte Lösung, nämlich $x = b - a$.

(d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot 0 = 0$.

Geben Sie bei jedem Beweisschritt das verwendete Axiom explizit an. (6 Punkte)

Aufgabe 2

Beweisen Sie für reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ die Gültigkeit des allgemeinen Distributivgesetzes

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j \,.$$

(8 Punkte)

Aufgabe 3

Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Beweisen Sie lediglich unter Zuhilfenahme dessen Eigenschaften, dass dann für alle $x, y, z, w \in K$ gilt:

(a) *Vergleichbarkeit:*
Entweder gilt $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.

(b) *Transitivität:*
$x < y,\ y < z \quad \Rightarrow \quad x < z.$

(c) *Verträglichkeit der Anordnung mit der Addition:*
Sei $x < y$ und $z < w \quad \Rightarrow \quad x + z < y + w.$

(d) *Verträglichkeit der Anordnung mit der Multiplikation:*

$$\begin{aligned} x < y \text{ und } z > 0 \quad &\Rightarrow \quad x \cdot z < y \cdot z\,. \\ x < y \text{ und } z < 0 \quad &\Rightarrow \quad x \cdot z > y \cdot z\,. \end{aligned}$$

(b) *Invertierung:*

Bezüglich Addition:	$x > 0$	$\Rightarrow$	$-x < 0\,.$
	$x < y$	$\Rightarrow$	$-x > -y\,.$
Bezüglich Multiplikation:	$0 < x < y$	$\Rightarrow$	$0 < y^{-1} < x^{-1}\,.$

(b) *Positivität des Quadrates:*
$x \neq 0 \ \Rightarrow \ x^2 > 0\,.$ (6 Punkte)

Aufgabe 4

Zeigen Sie mit Hilfe der Eigenschaften angeordneter Körper: Für jede reelle Zahl $q > 0$ gilt

$$q + \frac{1}{q} \geq 2\,.$$

(4 Punkte)