Mathematik für Informatiker I

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Michael Breuß

Wintersemester 2006/2007
Ausgabe: 27.10.2006
Abgabe: 03.11.2006 **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Beweisen Sie direkt folgende Aussagen:

$$(a) \qquad 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1$$

$$(b) \qquad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises, dass für alle reellen Zahlen a und b gilt:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

Tip: Benutzen Sie die Gültigkeit der Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3

Sei a_n eine mit Hilfe einer natürlichen Zahl n definierte ganze Zahl.

Man beweise die Gültigkeit der folgenden Aussagen für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

$(a) \qquad a_n = 5^n - 1$ ist ohne Rest durch 4 teilbar.
$(b) \qquad a_n = 6^n - 5^n + 4$ ist ohne Rest durch 5 teilbar.

(6 Punkte)

Aufgabe 4

Sei $q \neq 1$ eine reelle Zahl, und wir setzen stets $q^0 = 1$ (auch für $q = 0$). Versuchen Sie, die folgenden beiden Formeln für alle ganzen Zahlen $n \geq 0$ mittels vollständiger Induktion zu beweisen.

$$(a) \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k \; = \; \frac{q^{n+1} - q^2 + q - 1}{q - 1} + q \,,$$

$$(b) \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k \; = \; \frac{q^{n+1} + q^2 - q - 1}{q - 1} \,.$$

Welche Formel ist richtig? Ist keine von beiden richtig? Welcher Schritt im Beweis funktioniert nicht, und warum nicht? (6 Punkte)