Mathematik für Informatiker I

Prof. Dr. Joachim Weickert
PD Dr. Michael Breuß

Wintersemester 2006/2007
Ausgabe: 02.02.2007
Abgabe: 09.02.2007 **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 14

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe lernen Sie mit dem Newton-Verfahren einen effizienten allgemeinen Ansatz zur Nullstellenbestimmung einer Funktion $f \in C^2(\mathbb{R})$ kennen.

(a) Ausgehend von einem Startpunkt x_0 betrachten wir die Tangente $t(x)$ an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ und berechnen x_1 als Nullstelle von $t(x)$.
Zeigen Sie, dass ein iteratives Anwenden dieses Ansatzes auf das Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

führt.

(b) Beweisen Sie, dass das Newton-Verfahren für Startwerte x_0 aus einem Intervall $\mathcal{I}$ konvergiert, falls für alle $x \in \mathcal{I}$

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \right| \leq \gamma\,, \quad \gamma < 1\,, \gamma \in \mathbb{R}\,,$$

gilt.

(c) Suchen Sie eine Funktion f, mit deren Hilfe Sie $a = \sqrt{10}$ unter Benutzung des Newton-Verfahrens iterativ berechnen können. Führen Sie dann die ersten 4 Schritte der Berechnung von a durch. Ist ein Gesetz erkennbar, nach dem sich die Genauigkeit der Iterationsergebnisse verbessert?

(8 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei $f(x) = x^2$ für $x \in [0,1] =: \mathcal{I}$. Berechnen Sie für die äquidistante Zerlegung

$$Z_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$$

des Intervalls $\mathcal{I}$ Unter- und Obersumme und damit

$$\int_0^1 x^2\,dx\,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3

Berechnen Sie alle Stammfunktionen der folgenden Funktionen.

(a) $12x^2 + 5\sin x$

(b) $x^2 \sin x$

(c) $e^x \sin x$

(6 Punkte)

Aufgabe 4

Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{5x-1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

(6 Punkte)