Mathematik für Informatiker I

Prof. Dr. Joachim Weickert
PD Dr. Michael Breuß

Wintersemester 2006/2007
Ausgabe: 26.01.2007
Abgabe: 02.02.2007 **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 13

Aufgabe 0

Evaluieren Sie bitte die Vorlesung mit Hilfe der ausgeteilten Kennungen über die web-Seite eva.cs.uni-sb.de!

Aufgabe 1

Gegeben sei die reellwertige Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 200x + 9999.99}\,.$$

Zeichnen Sie zunächst den Graphen der Funktion (gern auch mit Hilfe eines Rechners). Fertigen Sie dann eine Kurvendiskussion zu dieser Funktion an. Untersuchen Sie dazu nach dem gleichen Muster wie in der Vorlesung: Definitionsbereich, Symmetrien, Pole, Verhalten im Unendlichen und Asymptoten, Nullstellen, Extrema und Monotonie, Wendepunkte und Konvexität.

(8 Punkte)

Aufgabe 2

Eine im Bereich der Signalverarbeitung sehr wichtige Funktion ist die sogenannte *sinc-Funktion*. Diese ist gegeben durch

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}\,.$$

Untersuchen Sie die sinc-Funktion hinsichtlich Definitionsbereich, Symmetrien, Pole, Verhalten im Unendlichen und Asymptoten, sowie ihrer Nullstellen.

(4 Punkte)

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = 3\,(x - \ln x) - \frac{13}{4}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass f genau zwei Nullstellen besitzt, und zwar in den Intervallen $[0.5, 1]$ und $[1.4, 1.5]$.

(b) Berechnen Sie, ausgehend von den Startwerten $x_0 = 0.75$ bzw. $x_0 = 1.45$, die beiden Nullstellen von f mit Hilfe des Fixpunktverfahrens, wobei die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes jeweils zu überprüfen sind. Führen Sie dazu 10 Iterationen durch (etwa mit Hilfe eines Rechners).

(c) Für die zu berechnenden Näherungen x_{10} führe man jeweils eine a-priori- und eine a-posteriori-Abschätzung durch.

(6 Punkte)

Aufgabe 4

Die numerische Berechnung der Quadratwurzel einer Zahl spielt eine wichtige Rolle in Teilgebieten der Informatik, z.B. für geometrische Berechnungen in der Computergrafik.

Ein klassischer Algorithmus, der die Implementierung der Quadratwurzelberechnung auf einem Chip erlaubt, ist gegeben durch das Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} + x_n\right) ,$$

wobei wir – für diese Aufgabe – Werte $a > 1$ und $x_0 \in [1, a]$ annehmen.

Untersuchen Sie das obige Verfahren mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach. Prüfen Sie dazu auch die Gültigkeit der entsprechenden Voraussetzungen und berechnen Sie für $a = 2$ die ersten 4 Iterationsergebnisse mit $x_0 = 2$ bzw. $x_0 = 1$. Für die zu berechnenden Näherungen x_4 führe man a-priori- und a-posteriori-Abschätzungen durch.

Hinweis: Was passiert im allgemeinen für Startwerte in $[1, \sqrt{a})$?

(6 Punkte)