Mathematik für Informatiker I

Prof. Dr. Joachim Weickert
PD Dr. Michael Breuß

Wintersemester 2006/2007
Ausgabe: 19.01.2007
Abgabe: 26.01.2007 **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 12

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4-ten Grades um die Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) .$$

(b) Schätzen Sie den Betrag des Restgliedes $R_4(x, x_0)$ für $x_0 = 1$ durch 2 ab.

(c) Was passiert, für $x_0 = 1$, in der Restgliedabschätzung für $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, und was folgern Sie daraus?

Tip: Überlegen Sie sich gegebenenfalls, an welcher Stelle eine (höhere) Ableitung von f in der Restgliedformel ausgewertet wird, und ob man diese Stelle bestimmen oder geeignet abschätzen kann.

(6 Punkte)

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 5-ten Grades um die Entwicklungsstelle $x_0 = -2$ für die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^7, \qquad x \in \left(-\frac{7}{3}, -\frac{3}{2}\right) .$$

(b) Zeigen Sie, dass $|R_5(x, -2)| \leq \frac{1}{2^3}$ für alle $x \in \left(-\frac{7}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ gilt.

(c) Wie groß kann der Fehler höchstens werden, wenn man $f(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = -2$ durch das Taylorpolynom siebten Grades approximiert, und was folgern Sie daraus?

(6 Punkte)

Aufgabe 3

Die Funktion $f:\ (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

(a) Finden Sie die Formel für die n-te Ableitung von f und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ und schätzen Sie den Betrag des Restgliedes auf dem Intervall $[1,3]$ ab.

(c) Geben Sie die Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ an. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

(d) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ für $x \in \left(\dfrac{1}{2}, 5\right)$ konvergiert. (Tip: Unterscheiden Sie dazu die Fälle $x < 2$ und $x > 2$.)

(12 Punkte)