Mathematik für Informatiker I

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Michael Breuß

Wintersemester 2006/2007
Ausgabe: 22.12.2006
Abgabe: 12.01.2007 **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 - 2$ auf dem reellen Intervall $[a, b] = [1, 2]$.

Berechnen Sie mit Hilfe des Bisektionsverfahrens die Nullstelle von f auf dem angegebenen Intervall. Führen Sie dazu die ersten 8 Schritte des Bisektionsverfahrens durch.

(4 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei wieder die Funktion $f(x) = x^2 - 2$ auf dem reellen Intervall $[a, b] = [1, 2]$.

Gehen Sie nun nach folgender Beschreibung vor. Verwenden Sie den Schnittpunkt der Geraden durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ mit der x-Achse als erste Näherung an die Nullstelle. So entsteht ein neuer Punkt $(x_1, f(x_1))$. Liegt die Nullstelle im Intervall (a, x_1), dann wird der Schnittpunkt der Geraden durch $(a, f(a))$ und $(x_1, f(x_1))$ mit der x-Achse die verbesserte Näherung x_2. Ist aber die Nullstelle im Intervall (x_1, b), dann wird der entsprechende Schnittpunkt der Geraden durch $(x_1, f(x_1))$ und $(b, f(b))$ verwendet, und so weiter.

Formulieren Sie mittels mathematischer Formeln entsprechend des beschriebenen Vorgehens einen iterativen Algorithmus zur Nullstellenbestimmung von f nach dem Muster der Darstellung des Bisektionsverfahrens aus der Vorlesung. Führen Sie dann die ersten 4 Schritte des beschriebenen Verfahrens durch, um die Nullstelle von f in $[1, 2]$ zu bestimmen.

(8 Punkte)

Aufgabe 3

In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen stetig? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{16}{x^3} & : \quad x \leq -2 \\ -\dfrac{x^2}{2} & : \quad -2 < x \leq 1 \\ \sqrt{x} + \dfrac{1}{3} & : \quad x > 1 \end{cases}$$

(b) $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{|x^2-1|} & : \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ 0 & : \quad x \in \{-1, 1\} \end{cases}$$

(8 Punkte)

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass die Gleichung $\sqrt{x + e^{-x}} = 2x$ auf dem Intervall $[0, 1]$ eine Lösung besitzt.

(4 Punkte)