Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2004

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Bernhard Burgeth

7. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Aufgabe 1: (5+1 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}, \quad x,y \in (0,+\infty),$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung.
Geben Sie auch das Lagrange-Restglied an.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der unter a) gewonnenen Taylorentwicklung einen Näherungswert für $f(1.2, 0.9)$.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Gegeben sei die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

und das dazu gebildete Finite-Differenzen-Verfahren aus der Vorlesung.
Berechnen Sie numerisch die genäherten Funktionswerte u_i^k für die drei Zeitschichten $k = 1,2,3$ und die Gitterpunkte $i = -5,-4,\dots,4,5$, wenn die Werte der 0-ten Zeitschicht

$$u_i^0 = \begin{cases} 1 & \text{für } |i| = 1,2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben sind. Es sei dabei $h = 1$ und $\tau = 0.1$.
Stellen Sie die berechneten Werte für die einzelnen Zeitschichten grafisch dar.

Aufgabe 3: (5+1 Punkte)

Von der Funktion $u(x)$ seien die Werte $u_{i+\frac{1}{2}} = u(i+\frac{1}{2})$ an den Stellen $x = i+\frac{1}{2}$, i ganzzahlig, bekannt. Die Funktion $u(x)$ wird als unendlich oft differenzierbar vorausgesetzt.

a) Bestimmen Sie eine möglichst gute Approximation für den Wert $u''_i = u''(i)$ der zweiten Ableitung von u an der Stelle $x = i$, i ganzzahlig, unter Verwendung der vier Funktionswerte $u_{i-\frac{3}{2}}$, $u_{i-\frac{1}{2}}$, $u_{i+\frac{1}{2}}$, $u_{i+\frac{3}{2}}$.

b) Welche Konsistenzordnung hat diese Approximation?

Aufgabe 4: (3+2 Punkte)

Diese Aufgabe soll Ihnen die Grundzüge der Methode der kleinsten Quadrate nahebringen. Ein Informatiker vermutet einen linearen Zusammenhang $y = a\,x + b$ zwischen der Größe der Eingangsdaten x und der Laufzeit y seines Programms. Er macht n Testläufe mit jeweils verschiedenen Datensätzen der Größe $x_1, \ldots x_n$ und erhält Laufzeiten $y_1, \ldots, y_n$. Es sei $d_i = y_i - (a\,x_i + b)$ die vertikale Abweichung des Punktes (x_i, y_i) von der durch $a\,x + b$ bestimmten Geraden.
Die Methode der kleinsten Quadrate besteht nun darin, a und b so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate $\sum_{i=1}^n d_i^2$ minimal wird. Die so gefundene Gerade approximiert die gegebenen Punkte in diesem Sinne optimal.

a) Zeigen Sie, dass dies erreicht wird, wenn a und b das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^n x_i + b\,n &= \sum_{i=1}^n y_i \\ a\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i\,. \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie diese eben eingeführte “Least Square”- Gerade, wenn die Tests folgende Datenpaare (GByte, Sekunden) liefern: $(3.1, 2.2), (4.3, 4.9), (6.1, 11.2), (6.8, 13.5)$, $(9.5, 21)$. Zeichnen Sie Punkte und approximierende Gerade.

Abgabetermin: Freitag, 11. 6. 2004 vor der Vorlesung