Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2004

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Bernhard Burgeth

5. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Aufgabe 1: (2+2+2 Punkte)

Es sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix und es bezeichne $\|\cdot\|$ sowohl eine Vektornorm auf dem $\mathbb{R}^n$ als auch die zugehörige Matrixnorm. Man definiert eine durch $\|\cdot\|$ induzierte *Konditionszahl* $\kappa(A)$ vermöge $\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

a) Zeigen Sie:

$$\kappa(A) = \frac{\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}.$$

b) Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa(M)$ der Matrix $M := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ bezüglich der Spektralnorm.

c) Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $x, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zu einer Näherungslösung $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ der Gleichung $Ax = b$ definiert man das *Residuum* r durch $r := A\tilde{x} - b$. Zeigen Sie:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

Bemerkung: Diese Ungleichung besagt, dass ein kleines Residuum nur dann einen kleinen relativen Fehler impliziert, wenn auch die Konditionszahl $\kappa(A)$ klein ist.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Bestimmen Sie mittels einfacher Vektoriteration Näherungswerte für den dominanten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor der Matrix M aus Aufgabe 1 dieses Übungsblattes. Beginnen Sie dabei mit dem Vektor $(1, 0)^\top$ und führen Sie mindestens vier Iterationsschritte aus.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde das *Jacobi-Verfahren* zur Bestimmung aller Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix beschrieben. Die Grundidee des Verfahrens besteht

darin, in jedem Schritt ein Paar symmetrisch zueinander liegender Matrixeinträge außerhalb der Hauptdiagonalen durch eine orthogonale Transformation zu Null zu machen.
Dazu wird im n-ten Schritt des Verfahrens aus der Matrix A mit den Matrixeinträgen a_{kl}, $k,l = 1,\dots,N$, die Matrix $\tilde{A} := O_n^\top A O_n$ mit den Matrixeinträgen $\tilde{a}_{kl}$, $k,l = 1,\dots,N$, gebildet. In der transformierten Matrix $\tilde{A}$ sollen die Einträge $\tilde{a}_{ij}$ und $\tilde{a}_{ji}$ $(1 \le i < j \le N)$ gleich 0 sein. (Es wird angenommen, dass in der Matrix A die Einträge a_{ij} und a_{ji} nicht gleich 0 sind.) Dazu wählt man für O_n eine Drehmatrix der Gestalt

$$O_n = Q(i,j,\varphi_n) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \cos\varphi_n & & \dots & & \sin\varphi_n & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & -\sin\varphi_n & & \dots & & \cos\varphi_n & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

mit $-\frac{\pi}{4} < \varphi_n \le \frac{\pi}{4}$, wobei die Einträge $\cos\varphi_n$, $\pm\sin\varphi_n$ in der i-ten und j-ten Zeile und Spalte stehen.
Beweisen Sie: Damit für die transformierte Matrix gilt $\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji} = 0$, muss der Drehwinkel φ_n gemäß der Formel

$$\varphi_n = \arctan \frac{a_{jj} - a_{ii} \pm \sqrt{(a_{jj} - a_{ii})^2 + 4a_{ij}^2}}{2a_{ij}}$$

gewählt werden, wobei für $\pm$ das Operationszeichen $+$ zu wählen ist, wenn $a_{ii} \ge a_{jj}$, jedoch $-$, wenn $a_{ii} < a_{jj}$.

Aufgabe 4: (1+2+1 Punkte)

Es bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$ und $y \in \mathbb{R}^2$ einen beliebigen Punkt. Berechnen Sie a) den Gradienten, b) die Hesse-Matrix der auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ definierten Funktion

$$N_y(x) = \ln \|x - y\|$$

in $x \in \mathbb{R}^2$. Ist $N_y(x)$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ harmonisch?

Abgabetermin: Freitag, 28. 5. 2004 vor der Vorlesung