Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2004

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Bernhard Burgeth

2. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{(1,4,2)^\top, (-2,-1,3)^\top, (14,-7,7)^\top\}$ eine Orthogonalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ sind. Stellen Sie den Vektor $(5,2,9)^\top \in \mathbb{R}^3$ bzgl. dieser Basis dar.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthogonalbasis im Prä-Hilbert-Raum $\mathcal{P}_2$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 mit dem Skalarprodukt $\langle u, v\rangle := \int_0^1 u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x$. Beginnen Sie mit der Basis $\{1, x, x^2\}$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Betrachten Sie $V = C[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(x)\, v(x)\, dx\,.$$

Bestimmen Sie eine quadratische Funktion, welche die Funktion $u(x) = \cos(x)$ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bzgl. der induzierten Norm am besten approximiert.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Entwickeln Sie die folgende Funktion auf $[0, 2\pi]$ in eine Fourierreihe:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x \le \pi, \\ 2\pi - x & \text{für} \quad \pi < x \le 2\pi\,. \end{cases}$$

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Menge $O(n)$ der orthogonalen Matrizen und die Menge $SO(n)$ der orthogonalen Matrizen mit Determinante $+1$, mit der Matrixmultiplikation als Operation versehen, Gruppen sind.

Abgabetermin: Freitag, 7. 5. 2004 vor der Vorlesung