Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2002

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Bernhard Burgeth

1. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Beweisen Sie Satz 41.3 aus der Vorlesung:
Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) $u + v = v + u$.

(b) $(u + v) + w = u + (v + w)$.

(c) $u + 0 = 0 + u = u$.

(d) $u + (-u) = 0$.

(e) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.

(f) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

(g) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.

(h) $1v = v$.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Die p-Norm eines Vektors $v = (v_1, ..., v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ wird definiert als

$$\|v\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty).$$

und

$$\|v\|_\infty := \max\{|v_1|, ..., |v_n|\}.$$

Berechnen Sie die Distanz der Punkte $(1, 6)^\top$ und $(2, 3)^\top$ in den durch die p-Normen induzierten Metriken für $p = 1$, 2 und ∞.
Überlegen Sie sich, warum man für $p = 1$ von der Cityblock-Metrik spricht.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Für $f, g \in C[0,1]$ wird durch

$$d(f,g) := \left(\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 \, d\, x \right)^{\frac{1}{2}}$$

auf $C[0,1]$ eine Metrik definiert. Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass der Abstand der Funktionen $f(x) = e^x - 1$ und $g_t(x) = t \cdot x$ bezüglich dieser Metrik minimal wird.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Es sei M eine beliebige Menge mit mindestens zwei Elementen und

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 \text{ falls } x = y, \\ 1 \text{ falls } x \neq y. \end{cases}$$

Überprüfen Sie, ob (M, d) ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Funktionen $u(x) := 4 + x$ und $v(x) := 1 + 3x + x^3$ im Raum $C[0,1]$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx.$$

Abgabetermin: Freitag, 30. 4. 2004 vor der Vorlesung