Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2004

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Bernhard Burgeth

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur Mathematik für Informatiker II

Dieses Aufgabenblatt ist im Umfang einer dreistündigen Klausur angeglichen.

Numerische Berechnungen sind mit Taschenrechnergenauigkeit auszuführen.

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $u_1 = (-3, 4, 0)^\top$, $u_2 = (4, 3, 12)^\top$ orthogonal im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sind und ergänzen Sie die beiden Vektoren zu einer **Orthonormalbasis** des $\mathbb{R}^3$.

b) Stellen Sie den Vektor $v = (29, 103, 35)^\top$ bezüglich dieser Orthonormalbasis dar.

Aufgabe 2:

Es werde eine lineare Transformation der Form $x \mapsto A\,x$ für Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$ betrachtet. Dabei ist A eine reelle und positiv definite 2×2-Matrix.

Wird diese Transformation auf jeden der beiden Basisvektoren $(1, 0)^\top$ und $(0, 1)^\top$ zweimal angewendet, so ergeben sich die beiden Vektoren $(8.7, 3.6)^\top$ und $(3.6, 10.8)^\top$.

Bestimmen Sie die Matrix A.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie durch einfache Vektoriteration Näherungen für den dominanten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beginnen Sie mit dem Vektor $(1, 0)^\top$ und führen Sie drei Iterationsschritte aus.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}\,.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f im Nullpunkt. Sie brauchen das Restglied *nicht* explizit anzugeben.

Aufgabe 5:

Finden Sie die Maxima und Minima der auf dem $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion $f(x,y) = 4x + 6y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 52\,.$

Aufgabe 6:

Das Rechenzentrum bekommt einen Karton geliefert, in dem sich 8 Laptops von Siemens, 3 von Compaq und 9 von Dell befinden. Es werden 3 dieser Laptops nacheinander aus dem Karton genommen ohne dabei zu sehen, um welches Fabrikat es sich handelt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass a) alle 3 von Compaq, b) alle 3 von Siemens sind, c) mindestens einer von Compaq ist, d) einer von jedem Hersteller dabei ist.

Aufgabe 7:

In einem Labor werden Informatikstudierende auf Web-Sucht getestet. Es bezeichne A das Ereignis, dass die getestete Person Web-süchtig ist, und B das Ereignis, dass das Testresultat positiv ist. Aus langjähriger Erfahrung heraus kennt man die Wahrscheinlichkeiten $P(B|A) = 0.99$ und $P(B)|\overline{A}) = 0.005$ und man weiß, dass 10% der Informatikstudierenden diese Krankheit tatsächlich haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete(r) Informatiker/in diese Krankheit wirklich hat?

Aufgabe 8:

Von einer Fabrik sollen 1000-Ohm-Widerstände mit einer Toleranz von maximal 10% ausgeliefert werden. Sei X die normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 1000-Ohm und Varianz 2500-Ohm^2, welche die Anzahl der Ohm eines Widerstandes angibt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Kontrolle ein zufällig ausgewählter Widerstand nicht den Anforderungen genügt.

Aufgabe 9:

Aus einer Menge von Schrauben werden zufällig $n = 20$ Stück ausgewählt und ihre Durchmesser (Ø) gemessen (in mm) mit den folgenden Ergebnissen:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ø	0.79	0.68	0.75	0.73	0.69	0.77	0.76	0.74	0.73	0.68

Nr.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ø	0.72	0.75	0.71	0.76	0.69	0.72	0.70	0.77	0.71	0.74

Zum Niveau $\alpha = 0.05$ sollen Sie mit Hilfe des χ^2-Anpassungstests mit drei Klassen überprüfen, ob der Durchmesser der vermessenen Schrauben einer Normalverteilung mit $\mu = 0.75$ und $\sigma^2 = 0.001$ entstammt.