Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Sommersemester 2004

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Bernhard Burgeth

Lösungen der Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur Mathematik für Informatiker II

Lösung zu Aufgabe 1:

u_1 und u_2 sind schon orthogonal, denn $\langle u_1, u_2 \rangle = -12 + 12 + 0 = 0$. Das Kreuzprodukt (oder Vektorprodukt) $u_3 := u_1 \times u_2$ liefert dann vermöge seiner Eigenschaften ein Orthogonalsystem $\{u_1, u_2, u_3\}$. Es gilt:

$$u_3 = u_1 \times u_2 = (48, 36, -25)^\top .$$

Wir normieren die Vektoren u_1, u_2, u_3:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1 &:= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(-3,4,0)^\top}{\|(-3,4,0)^\top\|} = \frac{(-3,4,0)^\top}{\sqrt{9+16+0}} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)^\top , \\
\tilde{u}_2 &:= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(4,3,12)^\top}{\|(4,3,12)^\top\|} = \frac{(4,3,12)^\top}{\sqrt{16+9+144}} = \left(\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{12}{13}\right)^\top , \\
\tilde{u}_3 &:= \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{(48,36,-25)^\top}{\|(48,36,-25)^\top\|} = \frac{(48,36,-25)^\top}{\sqrt{2304+1296+625}} = \left(\frac{48}{65}, \frac{36}{65}, \frac{-5}{13}\right)^\top .
\end{aligned}$$

Weiter gilt (wegen der Einfachheit dieser Darstellung sind Orthonormalsysteme so begehrt):

$$v = \langle v, \tilde{u}_1 \rangle \cdot \tilde{u}_1 + \langle v, \tilde{u}_2 \rangle \cdot \tilde{u}_2 + \langle v, \tilde{u}_3 \rangle \cdot \tilde{u}_3 .$$

Man berechnet

$$\begin{aligned}
\langle v, \tilde{u}_1 \rangle &= \langle (29,103,35)^\top, (\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^\top \rangle = \frac{325}{5} = 65 , \\
\langle v, \tilde{u}_2 \rangle &= \langle (29,103,35)^\top, (\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{12}{13})^\top \rangle = \frac{845}{13} = 65 , \\
\langle v, \tilde{u}_3 \rangle &= \langle (29,103,35)^\top, (\frac{48}{65}, \frac{36}{65}, \frac{-5}{13})^\top \rangle = \frac{4225}{65} = 65 .
\end{aligned}$$

Das führt zur gesuchten Darstellung:

$$\begin{pmatrix} 29 \\ 103 \\ 35 \end{pmatrix} = 65 \cdot \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + 65 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \\ \frac{3}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix} + 65 \cdot \begin{pmatrix} \frac{48}{65} \\ \frac{36}{65} \\ \frac{-5}{13} \end{pmatrix} .$$

Bemerkung: Sie hätten auch den Vektor $u_2 \times u_1 = -u_3$ (!) zur Ergänzung der Basis heranziehen können, was offensichtlich nur einen Vorzeichenwechsel für den letzten Koeffizienten in obiger Darstellung zur Folge hat.
Alternativ kann man sich den dritten Vektor $\tilde{u}_3$ auch über das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren verschaffen.

Lösung zu Aufgabe 2:

Durch die zweimalige Anwendung der Transformation auf einen Vektor x entsteht der Vektor $A\,(A\,x) = A^2\,x$; somit gilt

$$A^2 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8.7\\3.6\end{pmatrix};\; A^2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.6\\10.8\end{pmatrix},\text{ zusammen } A^2 \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8.7&3.6\\3.6&10.8\end{pmatrix}.$$

Da auf der linken Seite der letzten Gleichung nichts anderes steht als A^2, ist eine reelle, positiv definite Matrix A gesucht, deren Quadrat die Matrix auf der rechten Seite ist (das ist möglich, da diese Matrix positiv definit ist: $8.7 > 0$; $8.7 \cdot 10.8 - 3.6^2 = 81 > 0$). Dazu wird die Matrix auf Diagonalform transformiert, indem Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt werden: Aus der charakteristischen Gleichung $0 = (8.7-\lambda)(10.8-\lambda) - 3.6^2 = 81 - 19.5\lambda + \lambda^2$ ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{19.5+7.5}{2} = 13.5$ und $\lambda_2 = \frac{19.5-7.5}{2} = 6$. Der Ansatz

$$\begin{pmatrix}8.7&3.6\\3.6&10.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 13.5\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ergibt für Eigenvektoren $(x,y)^\top$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 13.5$ die Bedingung $8.7x + 3.6y = 13.5x$, also $4x = 3y$. Ein normierter Eigenvektor ist also $(0.6, 0.8)^\top$. Analog findet man, dass $(0.8, -0.6)^\top$ ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 6$ ist. Es ist also

$$\begin{pmatrix}8.7&3.6\\3.6&10.8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.6&0.8\\0.8&-0.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13.5&0\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.6&0.8\\0.8&-0.6\end{pmatrix}.$$

Ersetzt man in diesem Produkt die Diagonalmatrix der Eigenwerte in der Mitte durch die Diagonalmatrix der Quadratwurzeln der Eigenwerte, also $\sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{6} \approx 3.6742346$ und $\sqrt{6} \approx 2.4494897$, so ergibt sich die gesuchte Matrix A:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix}0.6&0.8\\0.8&-0.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\sqrt{6}&0\\0&\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.6&0.8\\0.8&-0.6\end{pmatrix}\\
&\approx \begin{pmatrix}0.6&0.8\\0.8&-0.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3.6742346&0\\0&2.4494897\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.6&0.8\\0.8&-0.6\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2.890397(9)&0.5878775(4)\\0.5878775(4)&3.233326(5)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(Nachrechnen bestätigt die Richtigkeit der Lösung.)

Lösung zu Aufgabe 3:

Der Startvektor $x^{(0)} = (1,0)^\top$ ist normiert. Durch Multiplikation von links mit A erhält man sukzessive

$$\begin{array}{lll} A\,x^{(0)} = (1,1)^\top, & |A\,x^{(0)}| = \sqrt{2}, & x^{(1)} = \frac{1}{|A\,x^{(0)}|}A\,x^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^\top; \\ A\,x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2,1)^\top, & |A\,x^{(1)}| = \sqrt{5/2}, & x^{(2)} = \frac{1}{|A\,x^{(1)}|}A\,x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^\top; \\ A\,x^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(3,2)^\top, & |A\,x^{(2)}| = \sqrt{13/5}, & x^{(3)} = \frac{1}{|A\,x^{(2)}|}A\,x^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3,2)^\top; \end{array}$$

bzw. bei rein numerischer Rechnung

k	$A\,x^{(k)}$	$\lvert A\,x^{(k)}\rvert$	$x^{(k+1)}$
0	$(1,1)^\top$	1.4142136	$(0.7071068, 0.7071068)^\top$
1	$(1.4142136, 0.7071068)^\top$	1.5811388	$(0.8944272, 0.4472136)^\top$
2	$(1.3416408, 0.8944272)^\top$	1.6124515	$(0.8320503, 0.5547002)^\top$

Die Normen $|A\,x^{(k)}|$ sind Näherungswerte für den dominanten Eigenwert, die $x^{(k)}$ sind Näherungswerte für einen normierten Eigenvektor zu diesem Eigenwert.

Bemerkung: In der ersten Rechnung erkennt man, dass die auftretenden Zähler, Nenner und Radikanden der Fibonacci-Folge entstammen. Der exakte Wert des dominanten Eigenwertes ist das Verhältnis des goldenen Schnitts $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.6180340$.

Lösung zu Aufgabe 4:

Wir müssen den Gradienten und die Hesse-Matrix, d.h. die partiellen Ableitungen bis einschließlich 2. Ordnung von f berechnen (mit Kettenregel, nachdifferenzieren nicht vergessen).

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} \\ f_y(x,y) &= \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} \\ f_{xx}(x,y) &= \frac{8x^2}{(1+x^2+y^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{8y^2}{(1+x^2+y^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = \frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3}\,. \end{aligned}$$

Damit gilt nach Vorlesung für den Gradienten und die Hesse-Matrix im Ursprung:

$$(\nabla f)(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0))^\top = (0,0)^\top\,,$$

$$Hess(f)(0,0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Das Taylorpolynom $T_2(x,y)$ hat nun die Gestalt

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= \frac{1}{0!}f(0,0) + \frac{1}{1!}(x,y)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}(x,y)\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1-(x^2+y^2). \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5:

Mit der Funktion f und der Nebenbedingung bilde man die Lagrange-Funktion F:

$$F(x,y,\lambda) = 4x+6y+\lambda\cdot(x^2+y^2-52).$$

Eine notwendige Bedingung für das Auftreten von Extrema ist das Verschwinden des Gradienten dieser Funktion F, es muss also gelten:

$$0 \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2\lambda x \\ 6+2\lambda y \\ x^2+y^2-52 \end{pmatrix}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man für $x,y\neq 0$:

$$\left.\begin{array}{r} 2+\lambda x = 0 \\ 3+\lambda y = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{-2}{x} = \lambda = \frac{-3}{y} \Longrightarrow \frac{3}{2}x = y \qquad (*)$$

Diese Umformungen wären problematisch für $x=0$ oder $y=0$ (Division oder Multiplikation mit Null!), aber beides läßt sich durch die Gleichungen bereits ausschließen.
Einsetzen in die Nebenbedingung liefert nun

$$x^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 52 \Longleftrightarrow \frac{(4+9)\,x^2}{4} = 52 \Longleftrightarrow x^2 = 16.$$

Daraus ergeben sich die Lösungen $x_1 = 4$ und $x_2 = -4$.
Aus $(*)$ folgt für $x_1 = 4$, dass $y_1 = 6$, und für $x_2 = -4$, dass $y_2 = -6$.
Man errechnet $f(4,6) = 16+36 = 52$ und $f(-4,-6) = -16+(-36) = -52$.
Damit ist $(4,6)$ als Maximal- und $(-4,-6)$ als Minimalstelle erkannt.

Bemerkung: Dieser letzte Schluss beruht auf der in der Vorlesung angesprochenen Tatsache, dass eine stetige Funktion (hier $f(x,y) = 4x+6y$) auf einer kompakten Menge (hier der Kreis um den Ursprung mit Radius $\sqrt{52}$: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 52\}$) ihr Maximum und Minimum tatsächlich annimmt.

Lösung zu Aufgabe 6:

Es handelt sich bei diesem Experiment um Ziehung von 3 Objekten ohne Zurücklegen aus einer Gesamtheit von 20 Objekten. Wir haben einen Laplace-Raum (Gleichverteilung) vor uns.

Man hat $\binom{3}{3}$ Möglichkeiten, 3 aus 3 Compaq Laptops zu ziehen, das ist die Anzahl der günstigen Möglichkeiten. Also ergibt sich bei a):

$$P(\text{alle 3 von Compaq}) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{1140}\,.$$

Bei b) geht man ähnlich vor, man zieht 3 aus den 8 Siemens Laptops:

$$P(\text{alle 3 von Siemens}) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{14}{285}\,.$$

c) geht man über das Gegenereignis an (wie meistens bei Formulierungen die „mindestens einer ...“ lauten). Das „nicht mindestens einer ist ein Compaq Laptop“ heißt „keiner ist ein Compaq Laptop“, also muss man 3 aus den Nicht-Compaq Laptops erwischen, davon gibt es 17:

$$P(\text{keiner ist von Compaq}) = \frac{\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{34}{57}\,.$$

Und also errechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$\begin{aligned} P(\text{mindestens einer ist von Compaq}) &= 1 - P(\text{keiner ist von Compaq}) = \\ = 1 - \frac{\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} &= 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57}\,. \end{aligned}$$

Bei d) hat man $\binom{8}{1}$ Möglichkeiten ein Laptop von Siemens zu ziehen, $\binom{3}{1}$ für die Ziehung eines Compaq und $\binom{9}{1}$ für die Ziehung eines Dell Laptops. Daraus resultieren $\binom{8}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{9}{1}$ günstige Ziehungsmöglichkeiten:

$$P(\text{einer von jedem der 3 Hersteller}) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{9}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{18}{95}\,.$$

Lösung zu Aufgabe 7:

Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Web-Sucht unter den Studierenden ist 10%, d.h. $P(A) = 0.1$ und also $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.9$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\,. \tag{1}$$

Um diese nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit zu berechnen, bemerken wir allgemein, dass

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})\,.$$

Dies führt mit (1) zu

$$\begin{aligned} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} &= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})} = \\ &= \frac{0.99 \cdot 0.1}{0.99 \cdot 0.1 + 0.005 \cdot 0.9} \approx 0.9565 \end{aligned}$$

Bemerkung: Also immerhin werden etwas mehr als 95% der positiv getesteten Studierenden auch tatsächlich die Web-Sucht haben, bei einem Test der zu 99% sicher ist. Dieses gute Abschneiden des Tests liegt an dem relativ hohen Durchseuchungsgrad von 10%. Wie man nun leicht nachrechnet, wären es bei einem Durchseuchungsgrad von 0.1% nur noch ca. 16.5% richtig erkannter Web-Süchtiger! Also Vorsicht vor seltenen Krankheiten (und deren Diagnose durch Tests).

Lösung zu Aufgabe 8:

Bezeichnen wir mit A das Ereignis, dass der Widerstand zurückgewiesen wird, d.h. $A = \{X < 900\} \cup \{X > 1100\}$. Diese beiden Teilmengen sind disjunkt, $\{X < 900\} \cap \{X > 1100\} = \emptyset$ und folglich gilt

$$P(A) = P(X < 900) + P(X > 1100) = F_X(900) + (1 - F_X(1100))\,,$$

wobei F_X für die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X steht. X ist in unserem Fall normalverteilt mit Mittelwert $\mu = 1000(Ohm)$ und Standardabweichung $\sigma = \sqrt{2500(Ohm^2)} = 50(Ohm)$. Der Zusammenhang zwischen der Normalverteilung F_X und der Standardnormalverteilung Φ ergibt sich durch Normalisierung von X:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Beachtet man noch den Zusammenhang $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, so erhält man nach Einsetzen der gegebenen Werte

$$\begin{aligned} F_X(900) &= \Phi\left(\frac{900-1000}{50}\right) = \Phi(-2) = 1-\Phi(2)\,, \\ F_X(1100) &= \Phi\left(\frac{1100-1000}{50}\right) = \Phi(2) \end{aligned}$$

und mit Hilfe von Tabellen zu standardisierten Normalverteilung schließlich die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = 2*(1-\Phi(2)) \approx 2*(1-0.9772) = 0.0456\,.$$

Lösung zu Aufgabe 9:

Mit Hilfe des χ^2-Anpassungstest auf Normalverteilung kann man die Hypothese

H$_0$: die Grundgesamtheit (hier alle hergestellten Schrauben)
ist $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt

gegen die Alternative

H$_1$: die Grundgesamtheit ist **nicht** $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt

zum Signifikanzniveau α testen.

Zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ wollen wir durch den χ^2-Test überprüfen, ob der Durchmesser der gemessenen Schrauben einer Normalverteilung mit $\mu = 0.75$ und $\sigma = 0.001$ entstammt.

Wir unterteilen das Intervall $(-\infty, +\infty)$ in 3 Klassen. Es sollen dabei in jedem der drei Teilintervalle theoretisch gleich viele Beobachtungen liegen, also $I_1 = (-\infty, w_{\frac{1}{3}})$, $I_2 = (w_{\frac{1}{3}}, w_{\frac{2}{3}})$ und $I_3 = (w_{\frac{2}{3}}, +\infty)$, wobei $w_\alpha = w_\alpha(\mu, \sigma)$ das α-Quantil für die in diesem Fall angenommene $N(0.75, 0.001)$-Verteilung steht. Damit ist dann $p_i = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$, für die Wahrscheinlichkeiten p_i mit denen eine Beobachtung unter der Hypothese H_0 in der i-ten Klasse liegt. Das α-Quantil $\Phi^{-1}(\alpha)$ der Standardnormalverteilung sei mit $u_\alpha = u_\alpha(0,1)$ bezeichnet. Man überlegt sich, dass der folgende Zusammenhang zwischen den Quantilen $w_\alpha(\mu, \sigma)$ und u_α besteht:

$$w_\alpha(\mu, \sigma) = \sigma \cdot u_\alpha + \mu\,.$$

(Erinnern Sie sich an die Tatsache, dass für eine Zufallsvariable X die einer $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung gehorcht, $\frac{X-\mu}{\sigma}$ $N(0,1)$-verteilt ist.)

Damit findet man dann durch die tabellierte Standardnormalverteilung

$$\begin{aligned} w_{\frac{1}{3}} &= 0.75 + \sqrt{0.001} \cdot u_{\frac{1}{3}} = 0.75 + 0.32 \cdot (-0.43) = 0.736\,, \\ w_{\frac{1}{3}} &= 0.75 + \sqrt{0.001} \cdot u_{\frac{2}{3}} = 0.75 + 0.32 \cdot 0.43 = 0.764\,. \end{aligned}$$

Man erhält also die drei Klassen $(-\infty, 0.736]$, $(0.736, 0.764]$ und $(0.764, +\infty)$. Nun müssen wir feststellen, wie viele unserer beobachteten Meßwerte in jeder Klasse i liegen, diese Anzahl bezeichnen wir mit O_i, $i = 1, 2, 3$.
Die Zahl E_i ist dann die Zahl der unter H_0 erwarteten Beobachtungen in der i-ten Klasse. Es gilt $E_i = n\,p_i$, wobei p_i für die Wahrscheinlichkeit steht mit der eine Beobachtung unter der Hypothese H_0 in der i-ten Klasse liegt. In unserem Fall ist $p_i = \frac{1}{3}$ für $i = 1, 2, 3$ und $n = 20$ also stets $E_i = np_i = 6.67$. Die Ergebnisse dieser einfachen Berechnungen lassen sich in diesem konkreten Fall zusammenfassen in der folgenden Tabelle.

Klasse	$(-\infty, 0.736]$	$(0.736, 0.764]$	$(0.764, +\infty)$
O_i	11	6	3
E_i	6.67	6.67	6.67

Somit ergibt sich für die Prüfgröße

$$T = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{E_i}(O_i - E_i)^2 = 4.898.$$

T ist unter H_0 asymptotisch χ^2-verteilt mit $3 - 1 = 2$ Freiheitsgraden. Aus der Tabelle findet man $\chi^2_{2,0.95} = 5.991 > 4.898$.
Demnach kann die Hypothese also **nicht** verworfen werden.