§76: VERBORGENE MARKOWMODELLE

76.1. Motivation

Verborgene Markowmodelle (hidden Markov models, HMMs) spielen eine große Rolle in der Bioinformatik, der Sprach- und der Mustererkennung. Mit Hilfe der aus dem Bereich der Markowketten bekannten Übergangsmatrizen (§75) sucht man nach der wahrscheinlichsten Zustandsfolge, die eine gegebene Beobachtung erzeugt haben könnte.

76.2. Beispiel: Spieler mit fairer und unfairer Münze

Ein Spieler besitzt eine faire Münze, bei der Kopf und Zahl gleichws. sind $(p^+(0) = p^+(1) = \frac{1}{2})$ und eine gezinkte Münze, bei der Zahl wahrscheinlicher ist $(p^-(0) = \frac{1}{4},\ p^-(1) = \frac{3}{4})$. Wir beobachten n Münzwürfe und wollen entscheiden, ob er die faire oder die unfaire Münze genommen hat.

Sei k die Zahl der Ergebnisse, bei denen Zahl beobachtet wurde. Die einzelnen Ergebnisse seien $x_1, \dots, x_n$.

Fall 1: Münze war fair.

Ws., dass die Beobachtung $x = (x_1, \dots, x_n)$ eintritt, ist

$$P(x \mid \text{faire Münze}) = \prod_{i=1}^{n} p^+(x_i) = \frac{1}{2^n}$$

Fall 2: Münze war unfair.

$$\underbrace{P(x \mid \text{unfaire Münze})}_{\prod_{i=1}^{n} p^-(x_i)} = \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}}_{\substack{n-k \text{ Mal} \\ \text{Kopf}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^{k}}_{\substack{k \text{ Mal} \\ \text{Zahl}}} = \frac{3^k}{4^n}$$

Wir vermuten, dass die Münze fair war, falls

$$P(x \mid \text{faire Münze}) > P(x \mid \text{unfaire Münze})$$

$$\frac{1}{2^n} > \frac{3^k}{4^n} \quad \Big| \cdot 4^n$$

$$2^n > 3^k \quad \Big| \log_2$$

$$n > k \log_2 3$$

$$\frac{k}{n} < \frac{1}{\log_2 3} \qquad (*)$$

76.3. Schwierigeres Beispiel

Wir nehmen, dass der Spieler mit einer geringen Ws. von 0,1 die Münze innerhalb des Spiels austauscht. Wir wollen wissen, wann er welche Münze genommen hat.

Naiver Ansatz:

Wir betrachten die Beobachtungen innerhalb eines Fensters und überprüfen, ob (*) zutrifft oder nicht.

Problem:

Lösung hängt von Fenstergröße ab, und wir wissen nicht, wann der Spieler die Münze wechselt.

Verborgene Markowmodelle bieten einen alternativen stochastischen Zugang, um dieses Problem zu lösen.

76.4. Def.: Ein <u>verborgenes Markowmodell</u> (<u>hidden Markov model</u>, <u>HMM</u>) ist ein Tupel $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, M, E)$.

Dabei bezeichnen:

- Σ: Alphabet von Symbolen (Ann.: $|\Sigma| = r$)
- Q: Menge von Zuständen mit Symbolen aus Σ (Ann.: $|Q| = k$)
- $M = (p_{ij})$: stochastische Matrix mit Übergangsws.
  $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$
- $E = (e_i(b))$: Matrix der Emissionsws.
  $E \in \mathbb{R}^{k \times r}$

76.5. Beispiel

In Beispiel 76.3 bezeichnen:

- $\Sigma = \{0, 1\}$: Kopf (0) oder Zahl (1).
- $Q = \{f, b\}$: faire (f) oder unfaire (b) Münze
- $$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$ Übergangsws. für Münzwechsel
- $e_f(0) = \frac{1}{2}$, $e_f(1) = \frac{1}{2}$ Emissionsws. für faire Münze
  $e_b(0) = \frac{1}{4}$, $e_b(1) = \frac{3}{4}$ " " unfaire "

Die vom Spieler tatsächlich verwendete Zustandsfolge ist $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ mit $\pi_i \in Q$. Sie bleibt uns „verborgen".

Wir beobachten nur den Ergebnisvektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \in \Sigma$.

Die Ws., dass die beobachtete Sequenz x durch einen Pfad π erzeugt wurde, ist

$$P(x|\pi) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|\pi_i) \underbrace{P(\pi_i|\pi_{i+1})}_{\text{Übergangsws.}} \quad \text{mit } P(\pi_n|\pi_{n+1}) := 1.$$

76.6. Problemstellung

Gelöst werden soll nun das Dekodierungsproblem:
Finde zu einem gegebenen HMM $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, M, E)$ und einer Beobachtung $x = (x_1, \ldots, x_n)$ einen optimalen Pfad $\pi^* = (\pi_1^*, \ldots, \pi_n^*)$, der $P(x|\pi)$ maximiert:

$$\pi^* := \arg\max_{\pi} P(x|\pi)$$

76.7. Der Viterbi-Algorithmus (findet lokales Maximum)

Grundidee: optimaler Pfad $(\pi_1^*, \ldots, \pi_{i+1}^*)$ zur Beobachtung $(x_1, \ldots, x_{i+1})$ ist optimal unter allen Pfaden, die in dem (unbek.) Zustand $\pi_i^* = m \in Q$ enden.

$s_m(i)$: Ws., dass optimale Pfad $(\pi_1^*, \ldots, \pi_i^*)$ zur Beobachtung $(x_1, \ldots, x_i)$ in m endet $(1 \leq i \leq n)$.

$$\Rightarrow \quad s_\ell(i+1) = \underbrace{e_\ell(x_{i+1})}_{\substack{\text{Emissionsws.} \\ \text{für } \ell}} \cdot \underbrace{\max_{m \in Q} \{s_m(i) \cdot p_{\ell m}\}}_{\text{Übergang } m \to \ell} \qquad (**)$$

Initialisiere: $s_0(0) = 1$
$s_m(0) = 0 \qquad m \in \{1, \ldots, n\}$.

Im optimalen π^* gilt: $P(x|\pi^*) = \max_{m \in Q} \{s_m(i) \cdot p_{nm}\}$

Das Viterbi-Verfahren benötigt $O(nk)$ Rechenoperationen.