§75: MARKOWKETTEN

75.1. Motivation

Der Zustand eines Systems zur Zeit $n \in \mathbb{N}$ werde durch eine Zufallsvariable X_n beschrieben und soll nur von X_{n-1} abhängen (nicht jedoch von früheren Zuständen $X_{n-2}, X_{n-3}, \ldots$). Wir möchten das zeitliche Verhalten dieses Systems studieren, insbesondere das Langzeitverhalten für $n \to \infty$.

Prozesse dieser Art sind in der Informatik z.B. bei der Untersuchung der Auslastung von Servern wichtig (Warteschlangenmodelle).

75.2. Def.: Ein <u>stochastischer Prozess</u> ist eine Familie (X_t)

von Zufallsvariablen mit $t \in \mathbb{R}$ oder $t \in \mathbb{N}$. Wir denken dabei an t als Zeitparameter, der kontinuierlich oder diskret ist.

Ein diskreter stochastischer Prozess (X_n), $n \in \mathbb{N}$ heißt <u>Markowkette</u>, wenn die Verteilung von X_n bei gegebenem X_{n-1} nicht von der früheren Verteilungen X_k, $k < n-1$ abhängt:

$$P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots)$$
$$= P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}).$$

Bem.: Wichtig sind insbes. Markowketten, die nur endlich viele Zustände annehmen: $P(X_n \in \{1, \ldots, k\}) = 1$.

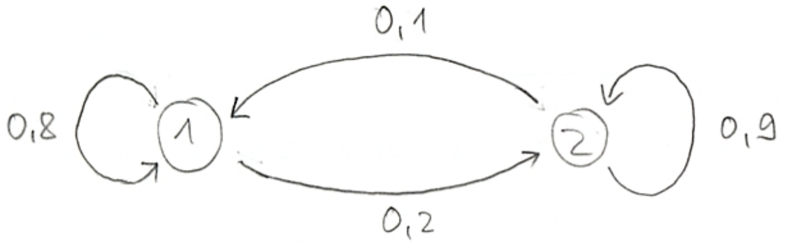
75.3. Beispiel mit Definitionen

Jedes Jahr ziehen 10% der Bevölkerung außerhalb Kaliforniens nach Kalifornien, und 20% der Bevölkerung Kaliforniens zieht aus.

Eine Person befindet sich im Jahr n-1 in einem von 2 Zuständen:

$$X_{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{(Person wohnt in Kalifornien)} \\ 2 & \text{(" " nicht in ")} \end{cases}$$

Der Zustand im Jahr n läßt sich dann durch ein graphisches Modell mit Übergangswahrscheinlichkeiten beschreiben:



Sei p_{ij}^n die Ws., dass ein Zustand j zur Zeit n-1 in den Zustand i übergeht (z.B. $p_{12}^n = 0{,}1$):

$$p_{ij}^n = P(X_n = i \mid X_{n-1} = j)$$

Wir definieren die <u>Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten</u> (<u>Übergangsmatrix</u>) durch

$$M_n := (p_{ij}^n) \in \mathbb{R}^{k \times k} \quad \text{(bei k Zuständen)}$$

Im Beispiel: $M_n = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

Die Verteilung von X_n auf die Zustände $i = 1, \dots, k$ werde durch einen Vektor $u_n \in \mathbb{R}^k$ beschrieben:

$$u_n = \begin{pmatrix} u_{n1} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{pmatrix}$$

Dann berechnet sich u_n aus u_{n-1} durch

$$u_n = M_n u_{n-1}.$$

Sind im Beispiel zur Zeit $n-1$ 60% der Bevölkerung außerhalb Kaliforniens, gilt:

$$u_{n-1} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$u_n = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}38 \\ 0{,}62 \end{pmatrix}$$

Im Jahr n sind somit 62% außerhalb Kaliforniens.

75.4. Def.: Eine Markowkette (X_n) heißt <u>homogen</u> oder <u>Kette mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten</u>, wenn die Übergangsmatrix M_n unabhängig von der Zeit n ist.

$$M_n = M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

75.5. Bemerkungen

a) Beispiel 75.3. beschreibt eine homogene Markowkette.

b) Wir nennen eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ eine <u>stochastische Matrix</u>, wenn alle Einträge nichtnegativ sind und die Spaltensummen 1 sind:

$$a_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \qquad \forall j \in \{1,\dots,n\}$$

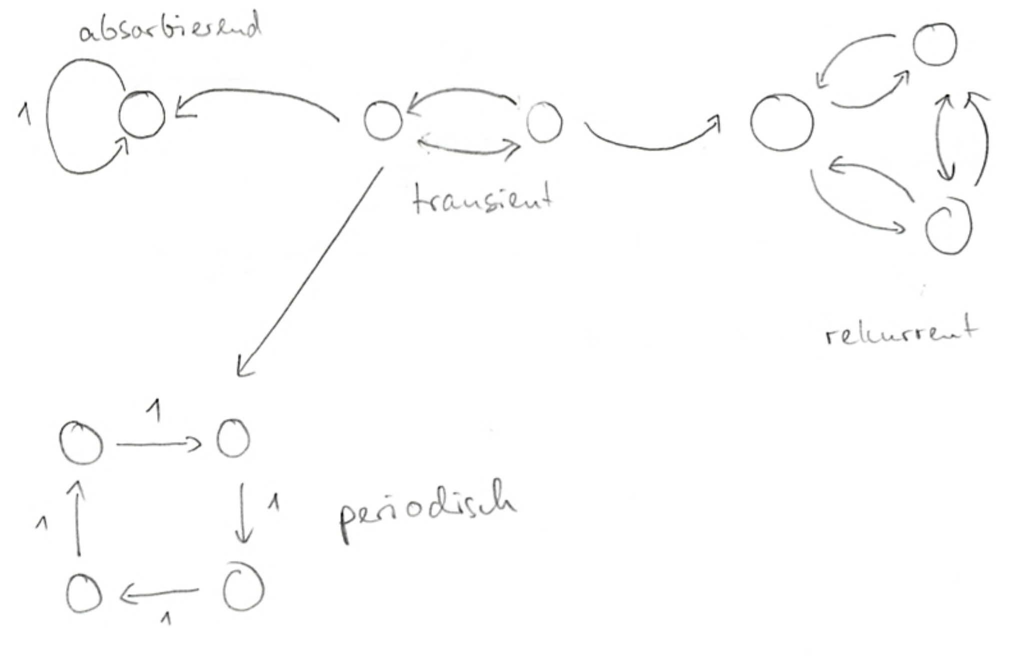
Übergangsmatrizen sind Beispiele für stochast. Matrizen.

c) In der Stochastikliteratur werden oft <u>Zeilen</u>vektoren u_n betrachtet und man definiert p_{ij}^{n} als die Übergangsws. von Zustand <u>i</u> nach Zustand <u>j</u>. Dann ist

$$u_n = u_{n-1} M_n$$

und stochastische Matrizen haben <u>Zeilen</u>summe 1.

75.6. Zustandsbeschreibung endlicher homogener Markowketten



Def.: Sei (X_n) eine endliche homogene Markowkette.

Ein Zustand i heißt

a) <u>transient</u>, wenn $P(X_m \neq i \;\; \forall m > n \mid X_n = i) > 0$

(kann verlassen werden)

b) <u>rekurrent</u>, wenn $P(X_m \neq i \;\; \forall m > n \mid X_n = i) = 0$

(mit Ws. 1 kehren wir zurück)

c) <u>periodisch</u> mit Periode l, wenn $P(X_{n+l} = i \mid X_n = i) = 1$

Eine Menge I von Zuständen heißt <u>absorbierend</u>, wenn $P(X_{n+1} \in I \mid X_n \in I) = 1$.

Um das Zeitverhalten von Markowketten zu verstehen, müssen wir stochastische Matrizen näher untersuchen.

75.7. Satz (<u>Eigenwerte stochastischer Matrizen</u>)

Sei $M = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ eine stochastische Matrix. Dann gilt:

a) $\lambda = 1$ ist Eigenwert von M^T

b) $|\lambda| \leq 1$ für alle Eigenwerte λ von M und M^T.

c) $\lambda = 1$ ist einziger Eigenwert von M^T mit $|\lambda| = 1$, falls $\min\limits_j p_{jj} > 0$.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen nur (a) und (b):

a) Ist M stochastisch, so hat $A = M^T$ Zeilensumme 1.

$$\Rightarrow \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_j a_{kj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 1$.

b) Betrachte die Spaltensummennorm

$$\|M\|_s = \max_j \left(\sum_{i=1}^k |p_{ik}| \right) = 1$$

Dann gilt nach 50.8 für jeden Eigenwert λ von M:

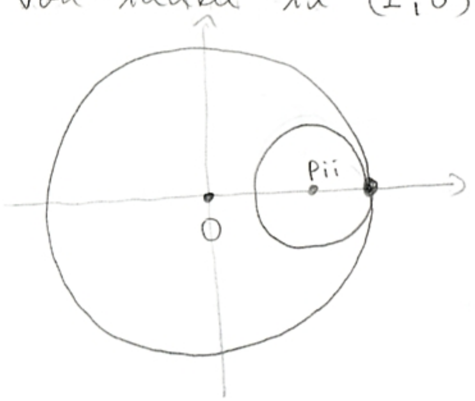
$$|\lambda| \le \|M\|_s = 1 .$$

Für M^T betrachtet man die Zeilensummennorm.

c) Nach dem Satz von Gerschgorin (50.10) gibt es zu jedem Eigenwert λ von $M^T = (a_{ij})$ mit

$$|\lambda - p_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k |a_{ij}| = 1 - p_{ii}$$

Also liegt λ in dem Kreis mit Mittelpunkt p_{ii} und Radius $1 - p_{ii}$. Er berührt den Einheitskreis von innen in $(1,0)$:



Aus $|\lambda| = 1$ folgt somit:

$$\lambda = 1 .$$

Bem.: Aussage 75.7 (c) gilt auch für M statt M^T.

75.8. Bedeutung des Eigenwerts $\lambda = 1$

Wir interessieren uns für das Verhalten einer endlichen homogenen Markowkette (X_n) für $n \to \infty$. Für einen Anfangszustand u_0 und eine Übergangsmatrix $M = (p_{ij})$ gilt:

$$\begin{aligned} u_1 &= M u_0 \\ u_2 &= M u_1 = M^2 u_0 \\ &\vdots \\ u_n &= M^n u_0 \end{aligned}$$

Ist u_0 Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = 1$, gilt:

$$u_n = M^n u_0 = \lambda^n u_0 = u_0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

d.h. der Zustand u_0 ist stabil.

Darüber hinaus kann man Folgendes zeigen:

75.9. Satz (Potenzen stochastischer Matrizen)

Sei M eine stochastische Matrix. Genau dann ex. $\lim_{n\to\infty} M^n$, wenn 1 der einzige Eigenwert von M vom Betrag 1 ist.

Beweis eines Teilresultats:

Wir zeigen: Sei λ ein Eigenwert von M mit $|\lambda| = 1$. Falls $\lim_{n\to\infty} M^n$ ex., ist 1 einziger Eigenwert von M vom Betrag 1.

Sei $v \neq 0$ ein Eigenvektor von M zum Eigenwert λ mit $|\lambda| = 1$:

$$Mv = \lambda v \quad \Rightarrow \quad M^n v = \lambda^n v \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Würde $\lim\limits_{n\to\infty} M^n$ ex., hätten wir

$$\left(\lim_{n\to\infty} M^n\right) v = \lim_{n\to\infty} (M^n v) = \lim_{n\to\infty} (\lambda^n v) = \left(\lim_{n\to\infty} \lambda^n\right) v$$

Also würde auch $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = \mu$ existieren. Dann wäre auch

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \lambda^{n+1} = \lambda \lim_{n\to\infty} \lambda^n = \lambda \mu .$$

Wegen $|\lambda| = 1$ ist auch $|\lambda^n| = 1$ und somit $|\mu| = 1 \neq 0$.

Aus $\mu = \lambda \mu$ folgt dann (nach Division durch μ):

$$\lambda = 1 .$$

$\square$

75.10. Gegenbeispiel

Wir betrachten eine stochastische Matrix, die Eigenwerte λ mit $|\lambda| = 1$, aber $\lambda \neq 1$ besitzt:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

Sie beschreibt eine zyklische Vertauschung.

Sei $\alpha = e^{2\pi i/k} = \cos \frac{2\pi}{k} + i \sin \frac{2\pi}{k}$

$(\Rightarrow \alpha^k = e^{2\pi i} = 1)$

Setzen wir

$$v_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha^j \\ \alpha^{2j} \\ \vdots \\ \alpha^{(k-1)j} \end{pmatrix} \qquad 0 \leq j \leq k-1$$

so folgt wegen $\alpha^k = 1$:

$$A v_j = \begin{pmatrix} \alpha^j \\ \alpha^{2j} \\ \vdots \\ \alpha^{kj} \end{pmatrix} = \alpha^j v_j$$

Also sind $1, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{k-1} \in \mathbb{C}$ sämtliche Eigenwerte von M. Alle haben Betrag 1.

75.11. Markow-Ketten im Gleichgewicht

Eine endliche homogene Markowkette (X_n) ist im Gleichgewicht, falls zu ihrer Übergangsmatrix $M = (p_{ij})$ ein Zustand u ex. mit

$$Mu = u,$$

d.h. u ist Eigenvektor zum Eigenwert 1, und es gilt:
$\sum_{i=1}^{n} u_i = 1, \quad u_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, n$

75.12. Beispiel

Im Beispiel 75.3 war die Übergangsmatrix gegeben durch:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenwerte:

$$0 = \begin{vmatrix} 0{,}8-\lambda & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9-\lambda \end{vmatrix} = (0{,}8-\lambda)(0{,}9-\lambda) - 0{,}02$$

$$= 0{,}72 - 0{,}8\lambda - 0{,}9\lambda + \lambda^2 - 0{,}02$$

$$= \lambda^2 - 1{,}7\lambda + 0{,}7$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{1{,}7 \pm \sqrt{1{,}7^2 - 4 \cdot 0{,}7}}{2} = \frac{1{,}7 \pm \sqrt{2{,}89 - 2{,}8}}{2}$$

$$= \frac{1{,}7 \pm 0{,}3}{2} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 0{,}7. \end{aligned}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & -0{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -0{,}2x + 0{,}1y = 0$$

$$x = \frac{1}{2} y$$

$$v = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$$

Da v eine Verteilung auf die Zustände beschreiben soll, muss gelten: $v_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$

$$\Rightarrow \quad v = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Dies beschreibt den Gleichgewichtszustand.

1/3 der Personen wohnt in Kalifornien, 2/3 außerhalb.

Wann ist es möglich, bei einer Markowkette von einem Zustand in einen beliebigen anderen zu gelangen?

75.12. Def.: Eine stochastische Matrix $M = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ heißt <u>transitiv</u> (<u>irreduzibel</u>), wenn man von jedem Zustand n zu jedem anderen Zustand m mit positiver Wahrscheinlichkeit in endlich vielen Schritten gelangen kann:

Es gibt ein von r, so dass für $M^r = B = (b_{ij})$ gilt:

$$b_{mn} > 0.$$

75.13. <u>Praktisches Kriterium für Transitivität</u>

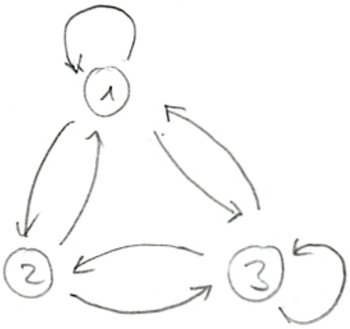
Man zeichnet zur Übergangsmatrix $M = (p_{ij})$ einen gerichteten Graphen: Ist $p_{ij} > 0$, zeichnet man einen Pfeil von j nach i.

Falls man von jedem Zustand längs solcher Pfeile zu jedem anderen Zustand gelangt, ist M transitiv, andernfalls nicht.

75.14. Beispiele

a)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

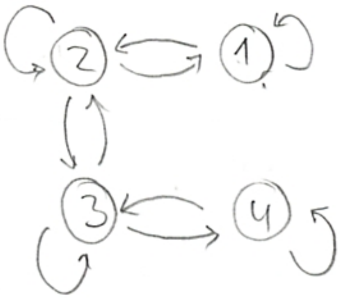


irreduzibel: Es gibt von jedem Punkt ein Weg zu jedem anderen Punkt.

beachte: Der Weg darf mehrere Pfeile umfassen. Daher führt auch ein Weg von 2 nach 2.

b)

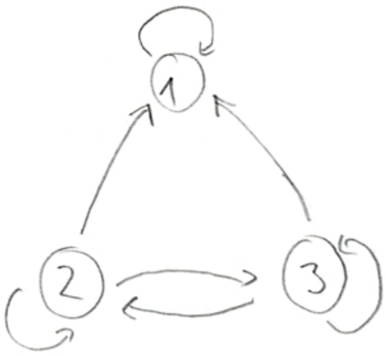
$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \\ & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ & & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$



irreduzibel

c)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



reduzibel: Es führt z.B. kein Weg von 1 nach 2