§ 74. FEHLERFORTPFLANZUNG

74.1. Motivation

Es werden 2 physikalische Größen x und y mehrmals gemessen. Man erhält als Mittelwert $\bar{x}, \bar{y}$ und als (empirische) Standardabweichung s_x, s_y (vgl. 70.4).
Nun will man hieraus eine neue Größe $z = f(x,y)$ berechnen. Als Schätzer für den Erwartungswert verwendet man

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Wie gehen jedoch die Meßfehler s_x, s_y in die Standardabweichung s_z ein? Man kann zeigen:

74.2. Satz (Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß)

Schätzt man aus zwei Fehler behafteten Größen x, y mit Mittelwert $\bar{x}, \bar{y}$ und Standardabweichung s_x, s_y eine neue Größe $z = f(x,y)$, so ist der Schätzer für ihren Erwartungswert gegeben durch

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y}),$$

und für die Varianz von z gilt:

$$\boxed{s_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\Big|_{\bar{z}} s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\Big|_{\bar{z}} s_y^2}$$

Beweisidee: Taylorentwicklung

74.3. Beispiel

Zwei Widerstände R_1, R_2 werden mehrmals gemessen. Man erhält (in Ohm)

$\bar{R}_1 = 100 \qquad s_{R_1} = 0{,}8 \qquad$ (Schreibweise: $R_1 = 100 \pm 0{,}8$)

$\bar{R}_2 = 200 \qquad s_{R_2} = 1 \qquad$ ($R_2 = 200 \pm 1$)

Wie groß ist der Gesamtwiderstand R und sein Fehler bei Parallelschaltung?

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \implies R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\bar{R} = \frac{\bar{R}_1 \bar{R}_2}{\bar{R}_1 + \bar{R}_2} = \frac{100 \cdot 200}{100 + 200} \approx 66{,}67$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{(R_1 + R_2) R_2 - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \qquad \left.\frac{\partial R}{\partial R_1}\right|_{\bar{R}} \approx 0{,}44$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} \qquad \left.\frac{\partial R}{\partial R_2}\right|_{\bar{R}} \approx 0{,}11$$

$$s_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right)^2_{\big|\bar{R}} s_{R_1}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right)^2_{\big|\bar{R}} s_{R_2}^2}$$

$$= \sqrt{0{,}44^2 \cdot 0{,}8^2 + 0{,}11^2 \cdot 1{,}0^2} \approx 0{,}37$$

$$R = \bar{R} \pm s_R \approx 66{,}67 \pm 0{,}37$$