§ 71. HYPOTHESENTESTS

71.1. Motivation

Bei Hypothesentests will man eine gewisse Annahme über eine Zufallsvariable darauf hin überprüfen, ob sie korrekt ist. Beispiele:

- Ist eine Münze fair ($p = \frac{1}{2}$)?
- Sind die Rechner von Hersteller A zuverlässiger als von Hersteller B?

Ein statistisches Experiment soll uns dabei eine Entscheidung mit einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit ermöglichen.

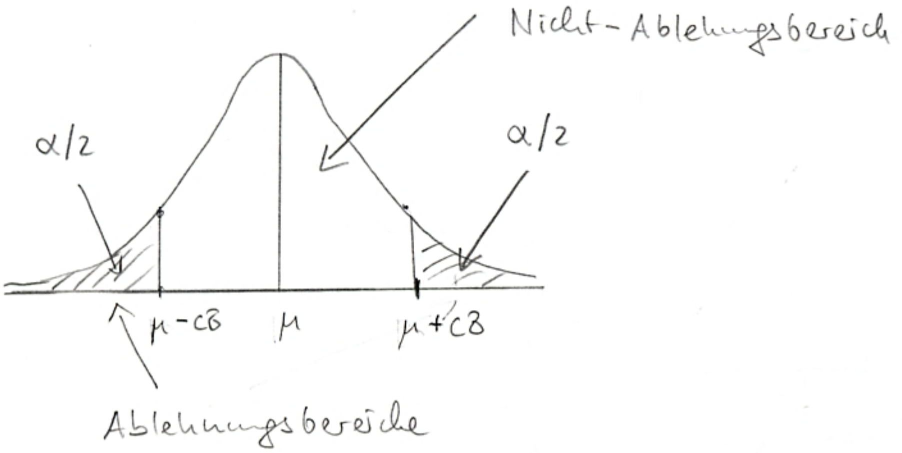
Gegenüber den Verfahren aus § 70 kann man in den Rechnungen die Hypothese mitverwenden, hat also mehr in der Hand.

71.2. Parametertest am Beispiel eines Münzexperiments

Wir beobachten das Ereignis A = "Münze zeigt Kopf" und wollen die Hypothese $p_0 = p(A) = \frac{1}{2}$ überprüfen, indem wir 200 Münzwürfe durchführen.

$$x_i := \begin{cases} 1 & \text{(Münze zeigt Kopf beim } i\text{-ten Wurf)} \\ 0 & \text{(Münze zeigt Zahl beim } i\text{-ten Wurf)} \end{cases}$$

Wie weit darf $S_{200} = \sum_{i=1}^{200} x_i$ sich vom Erwartungswert 100 unterscheiden, damit wir mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}05$ (Signifikanzniveau von $1 - \alpha = 0{,}95$) die Hypothese $p_0 = \frac{1}{2}$ nicht ablehnen?



Wir legen eine Binomialverteilung mit $n = 200$, $p = 0{,}5$ zu Grunde, die wir durch eine Normalverteilung mit $\mu = np = 100$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$ approximieren.

Wegen $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$ ist $c = 1{,}96$ für $\alpha = 0{,}05$.

Tritt bei 200 Würfen eine Kopfzahl S_n außerhalb $[\mu - c\sigma, \mu + c\sigma] \approx [86{,}1 ; 113{,}6]$ auf, wird man die Hypothese $p_0 = \frac{1}{2}$ auf einem Signifikanzniveau von 0,95 ablehnen. Andernfalls wird man sie nicht ablehnen.

71.3. Bemerkungen

a) Eine Hypothese an einen Parameter (etwa $p_0 = \frac{1}{2}$) nennt man auch Nullhypothese H_0, die Gegenannahme (z.B. $p_0 \neq \frac{1}{2}$) ist die Gegenhypothese H_1.

b) Bei Hypothesentests können zwei Arten von Fehlern auftreten:

- Fehler 1. Art: Hypothese wird abgelehnt, obwohl sie richtig ist. (wird durch Irrtumsws. α beschrieben).
- Fehler 2. Art: Hypothese wird angenommen, obwohl sie falsch ist. Dieser Fehler kann insbesondere für kleines α sehr groß sein.

71.4. Der χ^2-Test („Chi-Quadrat-Test")

Der χ^2-Test ist einer der wichtigsten Tests. Er wird bei folgendem Problem angewandt:
Ein Versuch habe m mögliche Ausgänge. Wir testen die Hypothese H_0, dass die Resultate mit vorgegebener Ws. $p_1, \dots, p_m$ auftreten.
Trifft H_0 zu, erwarten wir bei n Versuchen als Häufigkeit für die einzelnen Ausgänge: $np_1, \dots, np_m$.

In Wirklichkeit werden die Häufigkeiten $X_1, \dots, X_m$ beobachtet.

Als Maß für die Abweichung zwischen X_i und np_i verwendet man

$$\chi^2 := \sum_{i=1}^{m} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$$

Ist χ^2 „zu groß", wird man H_0 ablehnen.
Um zu beurteilen, was „zu groß" bedeutet, ist es sinnvoll den Erwartungswert von χ^2 zu kennen.
Ist jedes X_i $b_{n,p}$-verteilt, gilt nach

$$V(X_i) = E((X_i - np_i)^2) = np_i(1-p_i)$$

und aus der Linearität des Erwartungswerts folgt

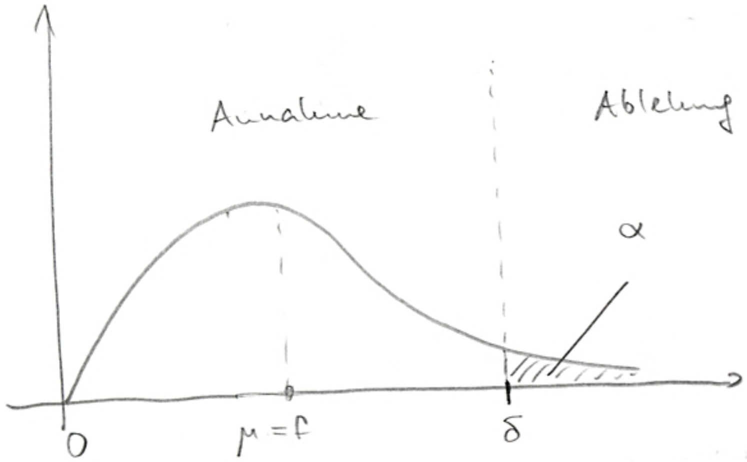
$$E(\chi^2) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{np_i} E((X_i - np_i)^2) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\cancel{np_i}} \cdot \cancel{np_i}(1-p_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i = m - 1 .$$

$f := m-1$ bezeichnet die <u>Freiheitsgrade</u> der χ^2-Verteilung, d.h. $m-1$ der p_i, $i = 1, \dots, m$ sind frei wählbar. Es gilt also:

$$\boxed{\mu = E(\chi^2) = f}$$

Der typische Verlauf der χ^2-Verteilung sieht folgendermaßen aus:



Für einen gegebenen Freiheitsgrad f und eine Irrtumsws. α ist die χ_f^2-Verteilung tabelliert.

Man nimmt H_0 an, falls der berechnete χ^2-Wert $\leq \delta$ ist.

" lehnt " ab " " " " $>$ " ;

71.5. <u>Beispiel</u>

Wir wollen mit 120 Würfen nachprüfen, ob ein Würfel „fair" ist, d.h. alle Augenzahlen sind gleich ws.:

$$p_1 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$$

Als Ergebnis erhalten wir:

Augenzahl i	1	2	3	4	5	6
beob. Häufigkeit X_i	15	21	25	19	14	26
erwart. Häufigkeit np_i	20	20	20	20	20	20

Wir erhalten:

$$\chi^2 = \frac{(15-20)^2}{20} + \frac{(21-20)^2}{20} + \dots + \frac{(26-20)^2}{20} \approx 6{,}2 .$$

Wir haben $f = 6 - 1 = 5$ Freiheitsgrade.

Geben wir eine Irrtumsws. von $\alpha = 0{,}1$ vor, so findet man in einer Tabelle:

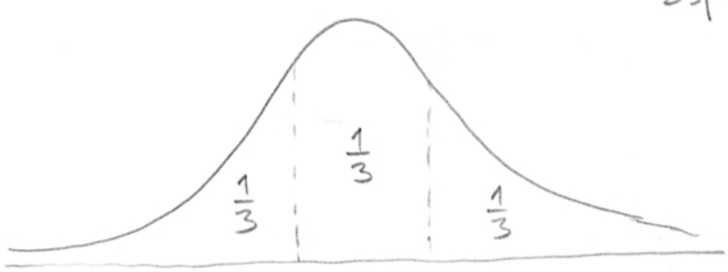
$$p(\chi_5^2 \leq \underbrace{9{,}24}_{\delta}) = \underbrace{0{,}9}_{1-\alpha}$$

Wegen $\chi^2 = 6{,}2 \leq 9{,}24 = \delta$ akzeptieren wir die Hypothese H_0, dass alle Augenzahlen gleich ws. sind.

71.6. Bem.:

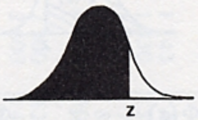
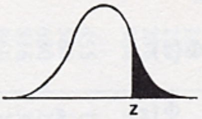
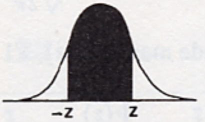
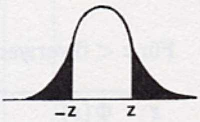
Möchte man eine $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung mit dem χ^2-Test für gegebenes μ, σ^2 verifizieren, teilt man in m (z.B. gleich wahrscheinliche) Klassen ein.

Bsp.: $m = 3$ Klassen



Dann überprüft man, ob die experimentell ermittelten Häufigkeiten das χ^2-Kriterium zu einer vorgegebenen Irrtumsws. α bei $f = m-1$ Freiheitsgraden erfüllen.

Wahrscheinlichkeiten der folgenden vier Ereignisse:

$S_n - np \leqq z\,\sigma$	$S_n - np \geqq z\,\sigma$	$\lvert S_n - np \rvert \leqq z\,\sigma$	$\lvert S_n - np \rvert \geqq z\,\sigma$
			

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$	$2\,\Phi(z)-1$	$2-2\,\Phi(z)$
0.0	.500	.500	.0000	1.0000
0.1	.540	.460	.0797	.9203
0.2	.579	.421	.159	.841
0.3	.618	.382	.236	.764
0.4	.655	.345	.311	.689
0.5	.691	.309	.383	.617
0.6	.726	.274	.451	.549
0.7	.758	.242	.516	.484
0.8	.788	.212	.576	.424
0.9	.816	.184	.632	.368
1.0	.841	.159	.683	.317
1.1	.864	.136	.729	.271
1.2	.885	.115	.770	.230
1.3	.9032	.0968	.806	.194
1.4	.9192	.0808	.838	.162
1.5	.9332	.0668	.866	.134
1.6	.9452	.0548	.890	.110
1.7	.9554	.0446	.9109	.0891
1.8	.9641	.0359	.9281	.0719
1.9	.9713	.0287	.9425	.0575
2.0	.9772	.0228	.9545	.0455
2.1	.9821	.0179	.9643	.0357
2.2	.9861	.0139	.9722	.0278
2.3	.9893	.0107	.9786	.0214
2.4	.99180	.00820	.9836	.0164
2.5	.99379	.00621	.9876	.0124
2.6	.99534	.00466	.99068	.00932
2.7	.99653	.00347	.99307	.00693
2.8	.99744	.00256	.99489	.00511
2.9	.99813	.00187	.99627	.00373
3.0	.99865	.00135	.99730	.00270
3.1	.999032	.000968	.99806	.00194
3.2	.999313	.000687	.99863	.00137
3.3	.999517	.000483	.999033	.000967
3.4	.999663	.000337	.999326	.000674
3.5	.999767	.000233	.999535	.000465
3.6	.999841	.000159	.999682	.000318
3.7	.999892	.000108	.999784	.000216
3.8	.9999277	.0000723	.999855	.000145
3.9	.9999519	.0000481	.9999038	.0000962
4.0	.9999683	.0000317	.9999367	.0000633

Die Stetigkeitskorrektur kann man berücksichtigen, indem man die Grenzen des schwarzen Gebiets um $\frac{1}{2\sigma}$ ins weiße Gebiet verlegt. Wahrscheinlichkeiten für $z < 0$ erhält man durch Symmetrie.

Schranken für χ^2 bei f Freiheitsgraden

$f \backslash P$	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01
1	0,00016	0,00098	0,00393	0,01579	2,70554	3,84146	5,02389	6,63490
2	0,00201	0,00506	0,10259	0,21072	4,60517	5,99147	7,37776	9,21034
3	0,11483	0,21580	0,35185	0,58438	6,25139	7,81473	9,34840	11,3449
4	0,29711	0,48442	0,71072	1,06362	7,77944	9,48773	11,1433	13,2767
5	0,55430	0,83121	1,14548	1,61031	9,23635	11,0705	12,8325	15,0863
6	0,87209	1,23735	1,63539	2,20413	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119
7	1,23904	1,68987	2,16735	2,83311	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753
8	1,64648	2,17973	2,73264	3,48954	13,3616	15,5073	17,5346	20,0902
9	2,08781	2,70039	3,32511	4,16816	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660
10	2,55821	3,24697	3,94030	4,86518	15,9871	18,3070	20,4831	23,2093
11	3,0535	3,8158	4,5748	5,5778	17,275	19,675	21,920	24,725
12	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038	18,549	21,026	23,337	26,217
13	4,1069	5,0087	5,8919	7,0415	19,812	22,362	24,736	27,688
14	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	21,064	23,685	26,119	29,143
15	5,2294	6,2621	7,2604	8,5468	22,307	24,996	27,488	30,578
16	5,812	6,908	7,962	9,312	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,408	7,564	8,672	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,015	8,231	9,390	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,633	8,907	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19
20	8,260	9,591	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,897	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,542	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,00	35,17	38,08	41,64
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89

Erläuterung der Tafel. Z.B. die 5. Zeile der Tafel bedeutet: Bei 5 Freiheitsgraden ist
$P(\chi^2 \geqq 0{,}5543) = 0{,}99, \quad P(\chi^2 \geqq 0{,}83121) = 0{,}975, \ldots, \quad P(\chi^2 \geqq 15{,}0863) = 0{,}01.$