§69: MULTIVARIATE VERTEILUNGEN UND SUMMEN VON ZUFALLSVARIABLEN

69.1. Motivation

Manchmal möchte man das Zusammenwirken mehrerer Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ studieren. Gibt es in diesem „multivariaten" Fall Aussagen über die gemeinsame Verteilung?
Lassen sich Aussagen über die Verteilung der Summe von Zufallsvariablen treffen?

69.2 Wichtige Definitionen

Mehrere Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ fasst man zu einem Vektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ zusammen. Im kontinuierlichen Fall ist die resultierende Dichte eine Funktion mehrerer Variablen. Für diese gemeinsame Dichte gilt:

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \qquad \forall\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = 1$$

$$P(a_1 \leq X_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq X_n \leq b_n) = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

Ferner betrachtet man die multivariate Verteilungsfunktion

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

Statt eines einzelnen Erwartungswerts hat man einen Erwartungswertvektor $\mu = (E(X_1), \dots, E(X_n))^T$.

Varianzen und Kovarianzen fasst man zu einer symmetrischen und positiv definiten Kovarianzmatrix zusammen:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} V(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \dots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & V(X_2) & & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & & \ddots & \\ Cov(X_n, X_1) & & & V(X_n) \end{pmatrix}$$

Die wichtigste multivariate Verteilung ist die multivariate Normalverteilung ($(N_n(\mu, \Sigma)$ - Verteilung):

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Vektor von normalverteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mu = (EX_1, \dots, EX_n)$ und Kovarianzmatrix Σ. Dann besitzt die multivariate Normalverteilung die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

69.3. Beispiel

Eine Apfelbaumplantage mit gleich alten Bäumen werde durch 3 normalverteilte Zufallsvariablen beschrieben:

X_1 : Höhe eines Baums [m] $\quad N(\overset{\mu}{4}; \overset{\sigma^2}{1})$ - verteilt

X_2 : Ertrag [1 kg] $\quad N(20; 100)$ - verteilt

X_3 : Zahl der Blätter [1000 Stück] $\quad N(20, 225)$ - verteilt

Diese Zufallsvariablen seien korreliert mit

$Cov(X_1, X_2) = 9$

$Cov(X_1, X_3) = 12{,}75$

$Cov(X_2, X_3) = 120$

Dann liegt eine $N_3(\mu, \Sigma)$ - Verteilung vor mit

$$\mu = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 12{,}75 \\ 9 & 100 & 120 \\ 12{,}75 & 120 & 225 \end{pmatrix}$$

Kann man unter geeigneten Voraussetzungen die gemeinsame Dichte $f(x_1,\dots,x_n)$ aus den einzelnen Dichten $f_1(x_1),\dots,f_n(x_n)$ berechnen? Man kann zeigen:

69.4. Satz (Gemeinsame Dichte unabhängiger Zufallsvariablen)

Seien $X_1,\dots,X_n$ unabhängige (!) Zufallsvariablen mit Dichten $f_1(x_1),\dots,f_n(x_n)$, so hat $X=(X_1,\dots,X_n)^T$ die gemeinsame Dichte

$$f(x_1,\dots,x_n) = f_1(x_1)\cdot\ldots\cdot f_n(x_n) \qquad (*)$$

Hat umgekehrt $X=(X_1,\dots,X_n)^T$ eine gemeinsame Dichte in der Produktdarstellung $(*)$, so sind $X_1,\dots,X_n$ unabhängig.

69.5. Beispiel

Zwei unabhängige Zufallsvariablen X_1, X_2 seien $N(\mu_1,\sigma_1^2)$- bzw. $N(\mu_2,\sigma_2^2)$-verteilt. Da Unabhängigkeit Unkorreliertheit impliziert (vgl. 65.22.(c)), hat die Korrelationsmatrix Diagonalgestalt:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Mit $\det\Sigma = \sigma_1^2\sigma_2^2$ und $\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{pmatrix}$ hat $X=(X_1,X_2)^T$ nach 69.2 eine multivariate Normalverteilung mit Dichte

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left((x_1-\mu_1)^2/\sigma_1^2 + (x_2-\mu_2)^2/\sigma_2^2\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\, e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\, e^{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

Dies ist gerade das Produkt der einzelnen Dichten $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$.

Gibt es Aussagen über die Dichte, wenn man die Summe zweier Zufallsvariablen betrachtet? Hierzu benötigen wir

69.6. Def.: Falls für die Funktionen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Integral

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

existiert, so nennen wir $f * g$ die Faltung von f und g.
(engl.: convolution)

69.7. Satz (Summe unabhängiger kontinuierlicher Zufallsvariablen)

Seien X_1, X_2 unabhängige kontin. Zufallsvariablen mit Dichten f_1, f_2, so hat $X_1 + X_2$ die Dichte $f_1 * f_2$.

Beweis: Mit $B := \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \leq s\}$ ergibt sich für die Verteilung von $X_1 + X_2$:

$$P(X_1 + X_2 \leq s) = \iint_B \underbrace{f_1(x_1) f_2(x_2)}_{\text{Unabh.}}\, dx_1\, dx_2 .$$

Mit der Substitution $u := x_1 + x_2$ erhalten wir

$$P(X_1 + X_2 \leq s) = \int_{-\infty}^{s} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(u - x_2)\, f(x_2)\, dx_2 \right)}_{(f_1 * f_2)(u)} dx_1 . \qquad \square$$

Hiermit läßt sich beweisen:

69.8. Satz (Summe unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen)

Seien X_1, X_2 unabhängige kontin. Zufallsvariablen mit $N(\mu_1, \sigma_1^2)$- bzw. $N(\mu_2, \sigma_1^2)$-Verteilung. Dann ist $X_1 + X_2$ ebenfalls $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt, und es gilt:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$
$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Auch im Fall diskreter Zufallsvariablen gibt es ähnliche Aussagen zu 69.6 – 69.8:

69.9. Def.: Für $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $g = (g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ definiert man die <u>(diskrete) Faltung</u> von f und g durch

$$(f * g)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{i-j} \, g_j$$

69.10. Satz (<u>Summe unabhängiger diskreter Zufallsvariablen</u>)

Seien X_1, X_2 unabhängige diskrete Zufallsvariablen mit Verteilungen P_{X_1}, P_{X_2}. Dann hat $X_1 + X_2$ die Verteilung $P_{X_1} * P_{X_2}$, wobei $*$ die diskrete Faltung bezeichnet.

69.11. Satz (<u>Summe unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsvariablen</u>)

Seien X_1, X_2 unabhängige diskrete Zufallsvariablen, die einer Poisson-Verteilung mit Parameter λ_1 bzw. λ_2 genügen (kurz: $P(\lambda_1)$-, $P(\lambda_2)$-verteilt). Dann ist $X_1 + X_2$ $P(\lambda_1 + \lambda_2)$-verteilt.

69.12. <u>Beispiel</u>

Beim radioaktiven Zerfall einer Substanz werden ionisierende Teilchen frei. Mit einem Geiger-Müller-Zählrohr zählt man die innerhalb einer Minute eintreffenden Teilchen. Sie sind Poisson-verteilt. Hat man zwei radioaktive Substanzen mit Poisson-Verteilung $P(\lambda_1)$ bzw. $P(\lambda_2)$, so genügt die Gesamtheit der pro Zeitintervall produzierten Teilchen einer $P(\lambda_1 + \lambda_2)$-Verteilung.