§ 67: WICHTIGE DISKRETE VERTEILUNGEN

67.1. Motivation

Einige diskrete Verteilungen treten sehr häufig auf und tragen einen eigenen Namen. Wir wollen vier dieser Verteilungen genauer betrachten: Gleichverteilung, Binomialverteilung, Poisson-Verteilung und geometrische Verteilung.

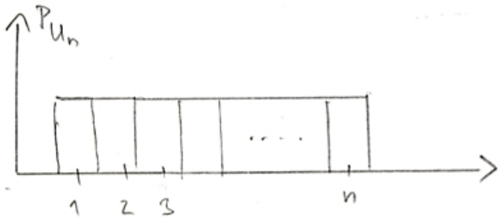
67.2. Die Gleichverteilung

(Laplace-Experiment).

Sei $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$ ein Stichprobenraum mit $P(w_k) = \frac{1}{n}$ $\forall k$.

Ferner sei U_n eine Zufallsvariable mit $U_n(w_k) = k$.

Dann ist $P_{U_n}(k) = \frac{1}{n}$ für $i = 1, \dots, n$. Eine solche Verteilung heißt (diskrete) Gleichverteilung auf der Menge $\{1, \dots, n\}$.



Es gilt: $\mu = E(U_n) = \sum_{k=1}^{n} k\, P_{U_n}(k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k$ arithm. Mittel

$$\sigma^2 = V(U_n) = \sum_{k=1}^{n} k^2\, P_{U_n}(i) - \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} k\right)^2$$

67.3. Beispiel

Beim Würfeln liegt eine diskrete Gleichverteilung auf der Menge $\{1, \dots, 6\}$ vor mit

$$\mu = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{6}\left(1^2 + 2^2 + \dots + 6^2\right) - 3{,}5^2 \approx 2{,}917 \Rightarrow \sigma \approx 1{,}708$$

67.4. Die Binomialverteilung

Wir betrachten ein Experiment, das aus einer n-fachen Wiederholung eines Einzelexperiments besteht, bei dem ein Ereignis A jeweils mit Ws. $p(A) = p$ auftritt. Ein solches Experiment heißt Bernoulli-Experiment. Wir setzen

$$X_i(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ beim } i\text{-ten Versuch auftritt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

A_k bezeichne das Ereignis, dass im Gesamtexperiment gilt:

$$X(w) = \sum_{k=1}^{n} X_i(w) = k$$

Nach 62.4 (c) (ungeordnete Stichprobe ohne Wdh.) hat A_k insgesamt $\binom{n}{k}$ Elemente. Jedes solche Element tritt mit Ws. $p^k (1-p)^{n-k}$ auf. Die entsprechende Verteilung

$$\boxed{b_{n,p}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

heißt Binomialverteilung mit den Parametern n und p.

Für den Erwartungswert von X_i gilt:

$$E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p \quad \Rightarrow \quad E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

Da die Einzelereignisse unabhängig sind, gilt:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Mit $V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - p^2 = p(1-p)$

folgt:

$$V(X) = np(1-p)$$

67.5. Beispiel: Zufallsabhängigkeit sportlicher Entscheidungen

Andreas und Bernd tragen ein Tischtennisturnier mit $n = 1, 3, 5, \dots, 2m+1$ Spielen aus. Wer die meisten Einzelspiele gewinnt, ist Sieger. Andreas gewinnt ein Einzelspiel mit Ws. 0,6. Wie groß sind die Siegeschancen für den schlechteren Spieler Bernd?

Bernd siegt, wenn Andreas $S_n \le m$ Erfolge erzielt. Die Ws. hierfür beträgt:

$$P(S_n \le m) = b_{n,p}(0) + b_{n,p}(1) + \dots + b_{n,p}(m)$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$n=1$: $\quad P(S_1 \le 0) = \binom{1}{0} 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^1 = 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$

$n=3$: $\quad P(S_3 \le 1) = \binom{3}{0} 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^3 + \binom{3}{1} 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^2$

$$= 0{,}4^3 + 3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^2 \approx 0{,}352$$

$n=5$: $\quad P(S_5 \le 2) = \binom{5}{0} 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^5 + \binom{5}{1} 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^4 +$

$$\binom{5}{2} 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3$$
$$\approx 0{,}317$$

$n=7$: $\quad P(S_7 \le 3) = \dots = 0{,}290$

$n=9$: $\quad P(S_9 \le 4) = \dots = 0{,}267$

Es ist also gar nicht so unwahrscheinlich, dass der schlechtere Spieler das Turnier gewinnt.

67.6. Die Poissonverteilung

Für große n wird das Arbeiten mit der Binomialverteilung unhandlich. Ist p klein $(0 \le p \le 1)$, gibt es eine gute Approximation, die Poissonverteilung zum Parameter λ.

$$\boxed{p(k) := \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Man kann zeigen, dass $p(k)$ für $\lambda = np$ die Binomialverteilung $b_{n,p}(k)$ approximiert. Ferner hat eine Poisson-verteilte Zufallsvariable den Erwartungswert λ und die Varianz λ.

Durch Umbenennung von „Erfolg" und „Fehlschlag" ist die Poissonverteilung auch für $0{,}9 \le p \le 1$ eine gute Approximation an die Binomialverteilung.

Generell beschreibt die Poisson-Verteilung Ereignisse, die im zeitlichen Verlauf zufällig und unabhängig voneinander auftreten, z.B.

- atomarer Zerfall
- das Eintreffen von Bedienwünschen an einem Server
- Anrufe in einem Call-Center
- das Auftreten von Softwarefehlern in einem Programmsystem.

67.7. Reales Beispiel: Der große Jubiläumstag

Genau in einem Jahr feiert ein großer Betrieb seinen 100. Geburtstag. Die Direktion beschließt, allen Kindern von Betriebsangehörigen, die an diesem Tag geboren werden, ein Sparkonto von 3000 € anzulegen. Da rund 730 Kinder pro Jahr geboren werden, erwartet man Auslagen von 6000 €. Um Zufallsschwankungen vorzubeugen, plant man 15.000 € ein. Wie groß ist die Ws., dass das Geld nicht reicht?

$n = 730$ Kinder / Jahr

$p = \frac{1}{365}$ Ws., dass Geburtstag auf Jubiläumstag fällt

$\Rightarrow \lambda = np = 2$

Das Geld reicht nicht, falls $k \geq 6$ Kinder geboren werden.

$$
\begin{aligned}
p(k \geq 6) &= 1 - p(k \leq 5) = 1 - p(0) - p(1) - \ldots - p(5) \\
&= 1 - \frac{2^0}{0!} e^{-2} - \frac{2^1}{1!} e^{-2} - \ldots - \frac{2^5}{5!} e^{-2} \\
&\approx 0{,}0168
\end{aligned}
$$

Die Ws. einer unangenehmen Überraschung ist also gering. Man rechnet nicht damit.

Anmerkung: Am Jubiläumstag wurden 36 Kinder geboren! Die Direktion hat es also verstanden, ihre Angestellten auch für außerbetriebliche Aktivitäten zu begeistern.

67.8. Die geometrische Verteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X, die in einem Bernoulliexperiment angibt, bei welchem Versuch ein Ereignis A mit Ws. $p(A) = p$ zum ersten Mal eintritt, heißt geometrisch verteilt mit Parameter p. Die entsprechende Verteilung lautet:

$$\boxed{P_X(k) = p \cdot (1-p)^{k-1}}$$

Man kann zeigen:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Sie spielt in der Informatik eine große Rolle bei der Modellierung von Wartezeiten.

67.9. Beispiel

Wie lange muss man beim Würfeln warten, bis die Augenzahl 4 erstmalig auftritt?

Mit $p = \frac{1}{6}$ beträgt der Erwartungswert

$$E(X) = \frac{1}{p} = 6$$

und die Varianz

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{36}} = 30$$