§ 62: KOMBINATORIK

62.1. Motivation

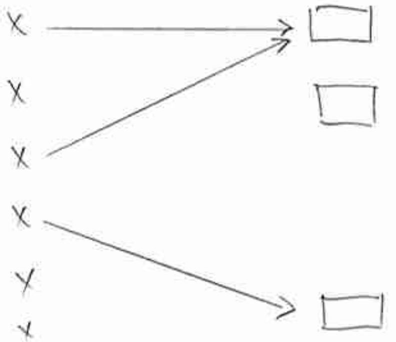
Die Kombinatorik liefert wichtige Modelle zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten. Sie spielt eine grundlegende Rolle in der Informatik.

62.2. Zwei äquivalente Sprechweisen

a) Stichprobensprechweise, Urnenmodell

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden k Kugeln gezogen. Dabei kann das Ziehen mit oder ohne Zurücklegen erfolgen, und die Reihenfolge eine oder keine Rolle spielen.

b) Zuordnungssprechweise, Schubladenmodell



k Objekte werden auf n Schubladen verteilt. Dabei sind die Objekte entweder unterscheidbar oder nicht unterscheidbar, und die Schubladen dürfen einfach oder mehrfach besetzt werden.

Urnen- und Schubladenmodell sind äquivalent:

Urnenmodell	Schubladenmodell
mit / ohne Zurücklegen	mit / ohne Mehrfachbesetzung
in / ohne Reihenfolge	unterscheidbare / ununtersch. Objekte

62.3. Produktregel der Kombinatorik

Bei einem k-stufigen Experiment habe der Ausgang einer Stufe keinen Einfluss auf die Anzahl der möglichen Ausgänge bei späteren Stufen. Haben die einzelnen Stufen $n_1, \dots, n_k$ Ausgänge, so hat das Gesamtexperiment $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$ Ausgänge.

Die Produktregel ist wichtig bei der Beschreibung der vier kombinatorische Grundsituationen.

62.4. Die vier kombinatorischen Grundsituationen

a) Geordnete Stichprobe mit Wiederholung

Bei k Ziehungen mit Zurücklegen aus einer Urne mit n Objekten gibt es n^k Möglichkeiten, wenn die Reihenfolge eine Rolle spielt.

Beispiel (aus einem älteren Stochastikbuch):

Herr Meier will seinen ungezogenen Sohn mit 10 Ohrfeigen bestrafen. Auf wie viele Arten kann er das tun, wenn er bei jedem Schlag eine von zwei Möglichkeiten hat (rechts oder links)?

Es gibt $2^{10} = 1024$ Möglichkeiten.

b) Geordnete Stichprobe ohne Wiederholung

Urnenmodell: k Ziehungen aus n Objekten ohne Zurücklegen, aber mit Berücksichtigung der Reihenfolge.

Möglichkeiten: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

$\uparrow$ 1. Ziehung $\qquad$ $\uparrow$ k-te Ziehung

Spezialfall: $k = n$: $\Rightarrow$ $n!$ Möglichkeiten

Für große n approximiert man $n!$ mit der Stirling-Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

Beispiel: Herr Meier will seine 5 Kinder in einer Reihe anordnen für eine Gruppenaufnahme.
Es gibt $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten.

c) Ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholung

Wie in (b), jedoch müssen die $k!$ Permutationen der k gezogenen Elemente mit einander identifiziert werden.
Daher gibt es nur $\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

Beispiel: Beim Lottoschein gibt es

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13.983.816$$

Möglichkeiten, 6 der 49 Zahlen anzukreuzen.
Die Ws., 6 Richtige zu tippen, ist daher

$$\frac{1}{13.983.816} \approx 7 \cdot 10^{-8}.$$

d) Ungeordnete Stichprobe mit Wiederholung

Hier ist das Schubladenmodell hilfreich:

Es sollen k nicht unterscheidbare Objekte in n Schubladen verstaut werden, wobei Mehrfachbesetzung möglich ist:

$$\underbrace{\circ\ \circ\ \circ}_{\text{1. Schublade}}\ \Big|\ \underbrace{\quad\quad}_{\text{2. Schubl.}}\ \Big|\ \circ\ \Big|\ \ldots\ \Big|\ \underbrace{\circ\ \circ}_{\text{n-te Schubl.}}$$

$n-1$ Trennungsstriche

Der Gesamtzustand wird beschrieben durch die Reihenfolge von k Objekten und $n-1$ Trennungsstrichen

$$\Rightarrow \quad \frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1} \text{ Möglichkeiten.}$$

(Durch die Division durch $k!\,(n-1)!$ wurden die Permutationen identifiziert)

<u>Beispiel</u>: Auf wie viele Arten können 60 Parlaments-Sitze auf 3 Parteien verteilt werden?

$k = 60, \quad n = 3$

$$\Rightarrow \quad \binom{62}{60} = \binom{62}{2} = \frac{62 \cdot 61}{2 \cdot 1} = 1891 \text{ Möglichkeiten}$$