TEIL F : STOCHASTIK

§ 61 : GRUNDBEGRIFFE

61.1. Motivation

Stochastik (aus Griechischen: vermuten, erwarten) ist die Mathematik des Zufalls. Sie ist von großer Bedeutung in der Informatik. Beispiele:

- Analyse der Auslastung von Datennetzen
- Modellierung von Antwortzeiten im Rechner
- Zuverlässigkeitsanalyse von Hardware
- Raytracing in der Computergrafik (Monte-Carlo-Methoden)
- stochastische Optimierungsalgorithmen (genet. Algor., simulated annealing)
- Analyse der mittleren Laufzeit von Algorithmen
- Kombinatorische Probleme in der Bioinformatik

61.2. Gebietsabgrenzung : Stochastik gliedert sich in 2 Gebiete:

a) Wahrscheinlichkeitstheorie:

Ausgehend von einem stochastischen Modell werden Wahrscheinlichkeiten berechnet.

Beispiel: Modellannahme:

Beim Wurf eines Würfels habe jede der Augenzahlen $1, \dots, 6$ die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$

Folgerung:

Ws. für Augenzahl 1 oder 3 ist $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

b) Statistik

Ausgehend von realen Daten / Messungen zieht man Schlussfolgerungen.

Beispiele:
- möglichst gute Approximationsgerade durch fehlerbehaftete Messwerte legen
- Hypothesentest: Ist ein neues Medikament wirksam?

61.3.

Def.: Die Wahrscheinlichkeit (Ws.) eines Ereignisses beschreibt die zu erwartende relative Häufigkeit, mit der dieses Ereignis eintritt, wenn man den zu Grunde liegenden Prozess immer wieder unter den gleichen Bedingungen wiederholt.

Bsp.: Bei einer „fairen" Münze beträgt die Wahrscheinlichkeit, Zahl zu würfeln, $\frac{1}{2}$.

61.4.

Def.: Ein Experiment heißt Laplace-Experiment, wenn es endlich viele, einander ausschließende Ausgänge hat, die alle gleich wahrscheinlich sind.

Bsp.: i) Der Wurf eines Würfels hat 6 gleich berechtigte Ausgänge $\Rightarrow$ Laplace-Experiment

ii) Fällt ein Marmeladenbrot zu Boden, gibt es zwei Ausgänge, die nach Murphy nicht gleich berechtigt sind $\Rightarrow$ kein Laplace-Experiment, falls dies stimmt

61.5. Mengentheoretische Wahrscheinlichkeitsbeschreibung:

Def.: Wir betrachten ein Zufallsexperiment mit endlich vielen Ausgängen und definieren drei Begriffe:

a) Ergebnismenge Ω (Stichprobenraum, Grundraum):

endliche, nicht leere Menge, deren Elemente ω_i die Versuchsausgänge beschreiben.

Bsp.: Würfelexperiment: $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

b) Ereignis:

Teilmenge von Ω.

Bsp.: Ergebnisse, bei denen 2 oder 5 gewürfelt werden

$\Rightarrow$ Ereignis $A = \{2, 5\}$

c) Wahrscheinlichkeitsverteilung, Wahrscheinlichkeitsmaß

Abb. P von der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ nach $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Normiertheit: $P(\Omega) = 1$

ii) Nichtnegativität: $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$

iii) Additivität: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für alle disjunkten $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Folgerung: Der Wertebereich von P liegt in $[0,1]$.