# §60: UMKEHRFUNKTION UND TRANSFORMATIONSREGEL

## 60.1. Motivation

Wir haben bereits viele Konzepte von Funktionen einer Variablen auf Funktionen mehrerer Variablen verallgemeinert: Differenzierbarkeit, Mittelwertsatz, Satz von Taylor, Extrema von Funktionen.

Wir wollen nun den Begriff der Umkehrbarkeit einer Funktion verallgemeinern. In diesem Zusammenhang finden wir auch ein Analogon zur Substitutionsregel: die Transformationsregel

## 60.2. Erinnerung: Umkehrbarkeit von Funktionen einer Variablen (vgl. 22.6. (f))

Eine $C^1$-Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ läßt sich lokal invertieren (nämlich in einer Umgebung, in der $f$ streng monoton ist):

Ist $f'(\xi)\neq 0$, ex. in einer Umgebung von $\eta=f(\xi)$ eine $C^1$-Umkehrfunktion $g$ mit

$$g'(\eta)=\frac{1}{f'(\xi)}$$

Für vektorwertige Funktionen mehrerer Variabler kann man folgendes Resultat zeigen:

60.3. Satz (Umkehrsatz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine $C^1$-Funktion.
Ferner sei $\xi \in D$.
Ist die Jacobi-Matrix $Jf(\xi)$ invertierbar, so ist $f$ lokal invertierbar: Es gibt offene Umgebungen $U_1$ von $\xi$ und $U_2$ von $\eta = f(\xi)$, so dass $f$ die Menge $U_1$ bijektiv auf $U_2$ abbildet.
Die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : U_2 \to U_1$ ist eine $C^1$-Funktion und es gilt

$$Jg(\eta) = (Jf(\xi))^{-1}.$$

Beweisidee:

Das letzte Resultat folgt aus $g \circ f = id_{U_1}$ (identische Abb. auf $U_1$) mit Hilfe der Kettenregel (vgl. 54.4.(b))

$$Jg(\eta) \cdot Jf(\xi) = I$$

Die lokale Existenz einer $C^1$-Umkehrfunktion $g$ erfordert ein aufwändiges Resultat (Satz über implizite Funktionen). $\square$

60.4. Bemerkungen

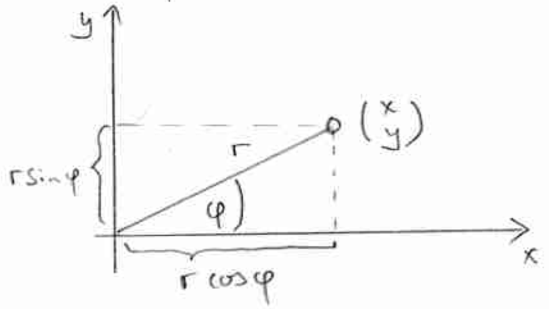
a) Wegen der Umkehrbarkeit müssen sowohl Definitionsbereich als auch Wertebereich von $f$ im $\mathbb{R}^n$ liegen.

b) Bijektive $C^1$-Funktionen, deren Umkehrung ebenfalls $C^1$-Abbildungen sind, heißen auch $C^1$-Diffeomorphismen.

c) Der Umkehrsatz besagt, dass $C^1$-Funktionen mit regulärer Jacobi-Matrix lokal umkehrbar sind.
Solche Abbildungen kommen in den Anwendungen oft bei Koordinatentransformationen vor.

## 60.5. Beispiel: Polarkoordinaten

Einen Vektor $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ mit $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ kann man durch seinen Abstand $r$ zum Ursprung und seinen Winkel $\varphi$ zur $x$-Achse beschreiben:




Die Funktion $f: (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$\binom{r}{\varphi} \mapsto \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi} = \binom{x}{y}$$

hat die Jacobi-Matrix

$$Jf(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Da $\det(Jf(r,\varphi)) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r > 0$, ist $f$ auf $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ lokal invertierbar:

Für $r \in (0,\infty)$ und $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ lautet die Umkehrfunktion:

$$g: \binom{x}{y} \mapsto \binom{\sqrt{x^2+y^2}}{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} = \binom{r}{\varphi}$$

Sie hat die Jacobi-Matrix

$$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{r\cos\varphi}{r} & \frac{r\sin\varphi}{r} \\ \frac{-r\sin\varphi}{r^2} & \frac{r\cos\varphi}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}$$

Damit gilt.

$$J g \cdot J f = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & -r\cos\varphi\sin\varphi + r\cos\varphi\sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} & \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d.h. $J g = (J f)^{-1}$.

Beachte: $f$ bildet $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ ab, ist aber nicht global umkehrbar, da

$$f(r,\varphi) = f(r, \varphi + 2k\pi) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Jacobi-Matrix von Koordinatentransformationen wird u.a. beim Berechnen von Mehrfachintegralen benötigt. Hier verwendet man oft die Transformationsregel, eine Verallgemeinerung der Substitutionsregel.

60.6. <u>Erinnerung: Substitutionsregel</u> (vgl. 29.6)

Zur Berechnung von $\int_c^d f(x)\,dx$ setze man $x = g(t)$ mit einer streng monotonen $C^1$-Funktion $g$ mit $g(a) = c$, $g(b) = d$, und formal: $dx = g'(t)\,dt$. Dann gilt:

$$\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx = \int_{t=a}^{t=b} f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Bem.: Ist $c<d$ und $g'<0$, so ist $a>b$. Somit gilt

$$\int_{x\in[c,d]} f(x)\,dx = -\int_{t\in[b,a]} f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int_{t\in[b,a]} f(g(t))\,|g'(t)|\,dt$$

Wie verallgemeinert man dies auf skalarwertige Funktionen mehrerer Variablen? Man kann zeigen:

## 60.7. Transformationsregel

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f: D \to \mathbb{R}$. Wir möchten

$\int_D f(x)\,dx$ berechnen. Es existiere eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$

und ein $C^1$-Diffeomorphismus $g: E \to D$. Setze $x = g(t)$.

Dann gilt unter geeigneten technischen Voraussetzungen

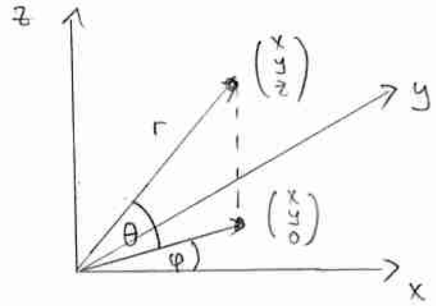
(auf die wir hier nicht näher eingehen):

$$\int_{x\in D} f(x)\,dx = \int_{t\in g^{-1}(D)} f(g(t))\,\left|\det Jg(t)\right|\,dt$$

Beachte: $x, t$ sind hier Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

## 60.8. Beispiel: Integration in Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten sind die 3-D Verallgemeinerung von Polarkoordinaten:




$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = g(r,\varphi,\theta)$$

$$Jg(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g_3}{\partial r} & \frac{\partial g_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_3}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det(Jg) = \sin\theta \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \end{vmatrix} + r\cos\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \sin\theta\left(r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta + r^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta\right) +$$

$$+ r\cos\theta\left(r\cos^2\varphi\cos^2\theta + r\sin^2\varphi\cos^2\theta\right)$$

$$= \sin\theta \; r^2 \sin\theta \cos\theta \; + \; r \cos\theta \; r \cos^2\theta$$

$$= r^2 \cos\theta \, .$$

Wir wollen hiermit das Volumen eines Kugeloktanden mit Radius $R$ berechnen:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \le R^2 \text{ und } x, y, z \ge 0 \right\}$$

$$\int_{(x,y,z) \in V} dx\, dy\, dz = \int_{(r,\varphi,\theta) \in g^{-1}(V)} |\det(J g)| \; dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{R} r^2 \cos\theta \; dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{R^3}{3} \cos\theta \; d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{R^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \cos\theta \; d\theta$$

$$= \frac{1}{6} \pi R^3 \left[ \sin\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{6} \pi R^3 \, .$$