§ 59 : VARIATIONSRECHNUNG

59.1. Motivation

Bisher haben wir uns mit Optimierungsproblemen befasst, bei denen ein einzelner optimaler Wert (Max. oder Min. eines Funktion, evtl. mit Nebenbedingungen) gesucht war.

Wir gehen jetzt zu Problemen über, bei denen eine gesamte Funktion gesucht wird, die ein Optimalitätskriterium erfüllt.

Solche Probleme treten in der Praxis oft auf, z. B.

a) Welche Form nimmt ein Bücherbrett an, wenn es gleichmäßig belastet wird?

Die gesuchte Funktion minimiert ein Integral, in dem eine Biegeenergie auftritt.

(Verwandtes Problem: Crashtestsimulation).

b) Ein verrauschtes Signal $f(x)$, $x \in [0,1]$ soll so gefiltert werden, dass das resultierende Signal $u(x)$ zwar noch nahe an $f(x)$ liegt, aber nur noch geringe Schwankungen aufweist.

Wir suchen also z. B. $u(x)$ als Minimierer des „Energiefunktionals" (ein Funktional ist eine Abb. von einer Funktion nach $\mathbb{R}$)

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \Big[\underbrace{(u(x) - f(x))^2}_{\text{Ähnlichkeit}} + \alpha \underbrace{\left(\frac{du}{dx}\right)^2}_{\text{Glattheit}} \Big]^2 \, dx$$

Der freie Parameter $\alpha > 0$ heißt Regularisierungsparameter. Er steuert die Glattheit der Lösung: Je größer α ist, desto stärker werden Abweichungen von der Glattheit bestraft, d.h. desto glatter ist die Lösung.

59.2. Ein diskretes Beispiel

Das Signal aus 59.1.(b) soll diskret vorliegen

$$f_0, f_1, \dots, f_N \qquad \text{mit } f_i = f(ih), \; h = \frac{1}{N}, \; i = 0, \dots, N$$

Gesucht ist ein gefiltertes diskretes Signal $u_0, \dots, u_N$, das die skalare Funktion mehrerer Variabler

$$E(u_0, \dots, u_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N} (u_i - f_i)^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right)^2$$

minimiert. Notwendige Bedingung für ein Minimum:

$$0 \stackrel{!}{=} \left(\frac{\partial E}{\partial u_0}, \dots, \frac{\partial E}{\partial u_N} \right)^T$$

komponentenweise:

$$0 = \frac{\partial E}{\partial u_0} = (u_0 - f_0) - \alpha \, \frac{u_1 - u_0}{h^2}$$

$$(*) \quad 0 = \frac{\partial E}{\partial u_k} = (u_k - f_k) - \alpha \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{h^2} - \frac{u_k - u_{k-1}}{h^2} \right) \qquad (k = 1, \dots, N-1)$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial u_N} = (u_N - f_N) - \alpha \left(- \frac{u_N - u_{N-1}}{h^2} \right)$$

$u_0, \dots, u_N$ muss also ein lin. Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha}{h^2} & -\frac{\alpha}{h^2} & & & 0 \\ -\frac{\alpha}{h^2} & 1 + 2\frac{\alpha}{h^2} & -\frac{\alpha}{h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{\alpha}{h^2} & 1 + 2\frac{\alpha}{h^2} & -\frac{\alpha}{h^2} \\ 0 & & & -\frac{\alpha}{h^2} & 1 + \frac{\alpha}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

Bem.: Wegen $\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h^2} = \frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2)$$

sieht (*) aus wie eine diskrete Form von

$$0 = (u-f) - \alpha \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

Kann man zeigen, dass diese Differentialgleichung direkt aus dem kontinuierlichen Minimierungsproblem

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(u-f)^2 + \alpha \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) \right] dx$$

folgt?

59.3. Satz (Euler-Lagrange-Gleichung)

Jede Lösung des Variationsproblems

Finde eine differenzierbare Funktion $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, die ein Funktional

$$E(u) = \int_a^b F(x, u, u_x)\, dx$$

minimiert und die Randbedingungen

$$u(a) = \alpha$$
$$u(b) = \beta$$

erfüllt

ist notwendigerweise Lösung der so gen. Euler-Lagrange-Gleichung

$$F_u - \frac{d}{dx} F_{u_x} = 0$$

mit den Randbedingungen

$$u(a) = \alpha$$
$$u(b) = \beta.$$

Beweis: Wir nehmen an, dass $u_0(x)$ eine differenzierbare Lösung des Variationsproblems ist und betten $u_0(x)$ in eine Schar von Konkurrenzfunktion ein:

$$u(x,\varepsilon) := u_0(x) + \varepsilon h(x) \quad \text{mit} \begin{cases} \text{einer diff'baren Fkt. } h(x) \text{ mit} \\ h(a) = h(b) = 0 \end{cases}$$

Da $u_0(x)$ das Integral $E(u)$ minimiert, besitzt

$$g(\varepsilon) := E(u_0 + \varepsilon h)$$

in $\varepsilon = 0$ ein Minimum. Daher muss gelten:

$$0 = g'(0) = \frac{d}{d\varepsilon} E(u_0 + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, u_0 + \varepsilon h, u_{0x} + \varepsilon h_x)\,dx \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$\overset{\text{Ketten-}}{\underset{\text{regel}}{=}} \int_a^b \left[F_u(x,u_0,u_{0x})h(x) + F_{u_x}(x,u_0,u_{0x})h_x(x) \right] dx$$

Mit der partiellen Integration

$$\int_a^b F_{u_x}(x,u_0,u_{0x})\,h_x(x)\,dx =$$

$$= \underbrace{F_{u_x}(x,u_0,u_{0x})\,h(x)\Big|_a^b}_{=0 \text{ da } h(a)=h(b)=0} - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(F_{u_x}(x,u_0,u_{0x})\right) h(x)\,dx$$

folgt

$$0 = \int_a^b \left[F_u(x,u_0,u_{0x}) - \frac{d}{dx} F_{u_x}(x,u_0,u_{0x}) \right] h(x)\,dx$$

für beliebige differenzierbare Funktionen $h(x)$.

$$\Rightarrow \quad 0 = F_u(x,u_0,u_{0x}) - \frac{d}{dx} F_{u_x}(x,u_0,u_{0x}). \qquad \square$$

59.4 Erweiterungen von Satz 59.3

Man kann Folgendes zeigen:

a) Keine Randvorgaben

Hat das Variationsproblem keine Randbedingungen, so besitzen die Euler-Lagrange-Gleichungen die „natürl. Randbedingungen"

$$\frac{du}{dx}\Big|_a = 0, \qquad \frac{du}{dx}\Big|_b = 0.$$

b) Funktionen mehrerer Variabler

Die Variationsgleichung

$$E(u) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} F(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), u_{x_1}, \dots, u_{x_n})\, dx_1 \dots dx_n$$

führt auf die Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = F_u - \frac{\partial}{\partial x_1} F_{u_{x_1}} - \dots - \frac{\partial}{\partial x_n} F_{u_{x_n}}$$

c) Höhere Ableitungen

$$E(u) = \int_a^b F(x, u, u_x, u_{xx}, \dots)\, dx$$

führt auf die Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = F_u - \frac{d}{dx} F_{u_x} + \frac{d^2}{dx^2} F_{u_{xx}} - + \dots$$

d) Vektorwertige Funktionen

$$E(u_1, \dots, u_m) = \int_a^b F(x, u_1, \dots, u_m, u_{1x}, \dots, u_{mx})\, dx$$

führt auf ein System von Euler-Lagrange-Gleichungen

$$0 = F_{u_1} - \frac{d}{dx} F_{u_{1x}}$$

$$\vdots$$

$$0 = F_{u_m} - \frac{d}{dx} F_{u_{mx}}$$

59.5. Beispiel

Wendet man 59.4.(a) auf Beispiel 59.1 (b) an, folgt aus

$$F(x, u, u_x) = \frac{1}{2}(u-f)^2 + \frac{\alpha}{2} u_x^2$$

durch partielles Ableiten:

$$F_u = u - f$$

$$F_{u_x} = \alpha u_x$$

und somit die Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = F_u - \frac{d}{dx} F_{u_x} = u - f - \alpha u_{xx}$$

wie in 59.2. vermutet. Die Diskretisierung in 59.2. stellt ein praktisches Lösungsverfahren für diese Diff.-Gl. dar.

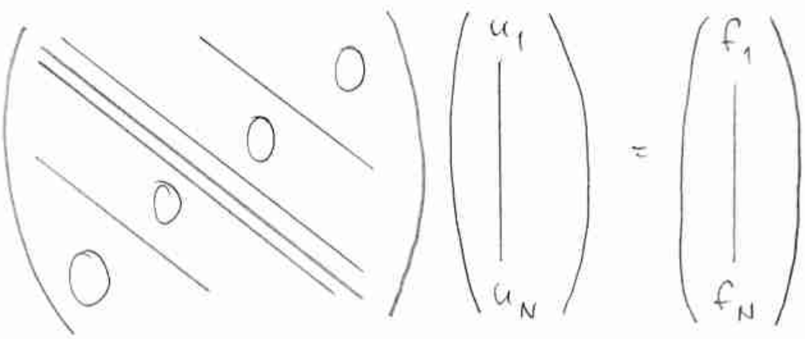
Im zweidimensionalen Fall (Entrauschen von Bildern) führt die Minimierung des Energiefunktionals

$$E(u) = \iint \Big[(u-f)^2 + \alpha \underbrace{(u_x^2 + u_y^2)}_{|\nabla u|^2} \Big] \, dx\, dy$$

zur Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = (u-f) - \alpha \underbrace{(u_{xx} + u_{yy})}_{\Delta u}$$

Nummeriert man im diskreten Fall die Punkte zeilen- oder spaltenweise durch, entsteht ein großes lin. Gleichungssystem, das dünn besetzt ist (max. 5 Einträge pro Zeile):



Es wird z.B. mit Gauß-Seidel oder SOR iterativ gelöst; vgl. § 39.