§58: EXTREMA MIT NEBENBEDINGUNGEN

58.1. Motivation

In §57 haben wir notwendige und hinreichende Kriterien kennengelernt, um lokale Extrema einer (skalaren) Funktion mehrerer Variabler zu bestimmen.

Oft sucht man jedoch die Extrema einer Funktion unter der Einschränkung, dass bestimmte Nebenbedingungen erfüllt sein müssen.

58.2. Beispiel: „Verpackungsminimierung" im $\mathbb{R}^2$

Gesucht ist ein Rechteck maximalen Inhalts bei einem vorgegebenen Umfang u.

D.h. maximiere

$$f(x,y) = xy \qquad (x,y: \text{Seitenlängen})$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = 2x + 2y - u = 0.$$

Lösungsmöglichkeit 1 (spezieller):

Löse Nebenbedingung nach einer Variablen auf:

$$2y = u - 2x \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{u}{2} - x \qquad (*)$$

Setze dies in $f(x,y) = xy$ ein.

Damit lautet das neue Optimierungsproblem

$$\text{Maximiere} \quad \tilde{f}(x) = x\left(\frac{u}{2} - x\right)$$

d.h. die Nebenbedingung reduziert die Freiheitsgrade von 2 auf 1.

Notwendige Bedingung für ein Maximum:

$$0 \stackrel{!}{=} \tilde{f}'(x) = \frac{u}{2} - 2x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{u}{4}$$

in $(*)$: $\quad y = \frac{u}{2} - x = \frac{u}{2} - \frac{u}{4} = \frac{u}{4}$.

Da $\tilde{f}''(\frac{u}{2}) = -2 < 0$ ist, handelt es sich tatsächlich um ein Maximum. Das optimale Rechteck ist ein Quadrat mit Seitenlänge $\frac{u}{4}$.

Bem.: Diese Lösungsmöglichkeit setzt voraus, dass wir die Nebenbedingung nach einer Variablen auflösen konnten. Falls dies nicht möglich ist oder umständlich erscheint, bietet sich der folgende Weg an:

Lösungsmöglichkeit 2 (allgemeiner)

Wir maximieren eine erweiterte Zielfunktion, in die die Nebenbedingung bereits eingearbeitet ist:

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &:= f(x,y) + \lambda\, g(x,y) \\ &= xy + \lambda(2x + 2y - u) \end{aligned}$$

mit einer zusätzlichen Variablen λ (Lagrange-Multiplikator).

Notwendige Bedingung für ein Maximum:

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2\lambda \\ x + 2\lambda \\ 2x + 2y - u \end{pmatrix}$$

Wir sehen: Die dritte Gleichung drückt die Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ aus.

Auflösen der 1. und 2. Gleichung nach λ:

$$\left.\begin{aligned} y &= -2\lambda \\ x &= -2\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y$$

Einsetzen in 3. Gleichung

$$4x - u = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u}{4} = y.$$

Man kann nachweisen, dass dies tatsächlich ein Maximum ist, indem man z.B. zeigt, dass die Hessematrix $HF\left(\frac{u}{4}, \frac{u}{4}, -\frac{u}{8}\right)$ negativ definit ist (vgl. §57).

58.3. Allgemeine Vorgehensweise

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$. Wir suchen Extrema von $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ unter den m Nebenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad g(x) = 0$$

mit $m < n$.

Statt der m Nebenbedingungen $g(x) = 0$ führen wir m zusätzliche Variablen $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T =: \lambda$ ein (so genannte Lagrange-Multiplikatoren) und maximieren / minimieren statt $f(x)$ die Lagrange-Funktion

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x).$$

Damit haben wir ein Extremalproblem mit n Variablen und m Nebenbedingungen in ein Extremalproblem in $n+m$ Variablen ohne explizite Nebenbedingungen umgewandelt.

58.4. Bemerkung

Man kann zeigen, dass der Ansatz 58.3 funktioniert: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g_1, \dots, g_m : D \to \mathbb{R}$ C^1-Funktionen. Ferner sei $\xi \in D$ ein lokales Extremum von $f(x)$ unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, und es gelte die „Regularitätsbedingung"

$$\operatorname{rang}(Jg(\xi)) = m.$$

Dann ex. Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, so dass die Lagrange-Funktion

$$F(x) = f(x) + \lambda^T g(x)$$

die notwendige Bedingung $\nabla F(\xi) = 0$ erfüllt.

58.5. Beispiel

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Bestimme die Extrema der quadratischen Form $x^T A x$ unter der Nebenbedingung $|x| = 1$.

Lösung:

$$F(x, \lambda) = x^T A x + \lambda (1 - x^T x)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j a_{ij} + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

Notwendige Bedingung:

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)^T .$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{kj} + \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{a_{ik}}_{=a_{ki}} = 2 \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j$$

folgt:

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j - 2\lambda x_1 \\ \vdots \\ 2 \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j - 2\lambda x_n \\ 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}$$

Gleichungen 1 bis n besagen, dass x Eigenvektor zu einem Eigenwert λ von A ist:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = \lambda x_k \qquad (k = 1, \dots, n).$$

Gleichung n+1 fordert, dass $|x|$ auf 1 normiert ist.

Für einen Eigenvektor x mit $|x| = 1$ gilt.

$$f(x) = x^T A x = x^T \lambda x = \lambda$$

Somit wird F(x) durch den Eigenvektor zum größten (kleinsten) Eigenwert maximiert (minimiert).

In der Informatik benötigt man dieses Resultat z.B. bei der Bewegungsanalyse in digitalen Bildfolgen.

58.6. Beispiel

Bestimme eine notwendige Bedingung für das Vorliegen von Extrema von

$$f(x,y,z) = 5x + y - 3z$$

auf dem Schnitt der Ebene

$$x + y + z = 0$$

mit der Kugeloberfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Lösung: $F(x,y,z,\lambda,\mu) = 5x + y - 3z + \lambda(x+y+z) + \mu(x^2+y^2+z^2-1)$

$$0 = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ F_\lambda \\ F_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + \lambda + 2\mu x \\ 1 + \lambda + 2\mu y \\ -3 + \lambda + 2\mu z \\ x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}$$ notwendige Bedingung.

Nach einigen Umformungen sieht man, dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

dieses Gleichungssystem lösen.